

# Couplages

LAURENT MONTAIGU

Voici les couplages que j'ai utilisés pour chaque leçons de l'année 2022/2023, lorsqu'il y a plus de deux développements, je me laissais la liberté de choisir ceux que je voulais présenter le jour J.

# 1 Leçons d'algèbre

## 1.1 Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

- Isométries du cube et du tétraèdre.
- $\mathfrak{A}_5$  est le seul groupe simple d'ordre 60.
- Réciprocité quadratique.
- Nombres de matrices nilpotentes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ .

## 1.2 Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Exemples et applications.

- Théorème de Kronecker et application.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
- Théorème de Gauss-Wantzel.

## 1.3 Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Théorème de Frobenius-Zolotarev.
- $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  est simple.
- $\mathfrak{A}_5$  est le seul groupe simple d'ordre 60.

## 1.4 Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

- $\mathfrak{A}_5$  est le seul groupe simple d'ordre 60.
- Isométries du cube et du tétraèdre.

## 1.5 Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Exemples et applications.

- Théorème Frobenius-Zolotarev.
- Isométries du cube et du tétraèdre.

## 1.6 Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$ . Applications.

- Décomposition de  $O(p, q)$ .
- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

## 1.7 Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  est simple.
- $\mathfrak{A}_5$  est le seul groupe simple d'ordre 60.

## 1.8 Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Applications.

- Nombres de Mersenne.
- Théorème de Chevalley-Waring et Erdős-Ginzburg-Ziv.

## 1.9 Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

- Réciprocité quadratique.
- Théorème de Gauss-Wantzel.
- Nombres de Mersenne.

**1.10 Leçon 122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.**

- Théorème des deux carrés.
- L'équation  $x^2 + 2 = y^3$ .

**1.11 Leçon 123 : Corps finis. Applications.**

- Réciprocité quadratique.
- Nombres de Mersenne.

**1.12 Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.**

- Nombres de Mersenne.
- Théorème de Gauss-Wantzel.

**1.13 Leçon 126 : Exemples d'équations en arithmétique.**

- Théorème des deux carrés.
- L'équation  $x^2 + 2 = y^3$ .

**1.14 Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

- Nombres de Mersenne.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

**1.15 Leçon 142 : PGCD et PPCM**

IMPASSE

**1.16 Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

- Théorème de Kronecker et application.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

**1.17 Leçon 148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.**

- Méthode QR.
- Décomposition de  $O(p, q)$ .

**1.18 Leçon 149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications**

- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .
- Méthode QR.
- Gradient à pas optimal.

**1.19 Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel . Rang. Exemples et applications.**

- Réduction de Frobenius.
- Théorème de Gauss-Wantzel.

## 1.20 Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

- Conique passant par 5 points.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

## 1.21 Leçon 153 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Endomorphismes semi-simple.
- Réduction de Frobenius.

## 1.22 Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- Endomorphismes semi-simple.
- Réduction de Frobenius.

## 1.23 Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

- Marche aléatoire sur le  $n$ -gone.
- $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.

## 1.24 Leçon 156 : Exponentielles de matrices. Applications.

- $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.
- Décomposition de  $O(p, q)$ .

## 1.25 Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- Nombres de matrices nilpotentes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ .
- Théorème de Burnside.

## 1.26 Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.
- Gradient à pas optimal.

## 1.27 Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

- Théorèmes des Extremas-liés.
- Réduction de Frobenius.

## 1.28 Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.
- Décomposition de  $O(p, q)$ .
- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

## 1.29 Leçon 161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

- $SO_3(\mathbb{R})$  simple.
- Isométries du cube et du tétraèdre.

**1.30 Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

- Méthode QR.
- Gradient à pas optimal.

**1.31 Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**

- Réciprocité quadratique.
- Décomposition de  $O(p, q)$ .

**1.32 Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

- Décomposition de  $O(p, q)$ .
- Conique passant par 5 points.

**1.33 Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.**

- Conique passant par 5 points.
- Sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**1.34 Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

- Réciprocité quadratique.
- $\mathfrak{A}_5$  est le seul groupe simple d'ordre 60.
- Nombres de matrices nilpotentes sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{F}_q)$ .

**1.35 Leçon 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.**

- Isométries du cube et du tétraèdre.
- Théorème de Gauss-Wantzel.

## 2 Leçons d'analyse

### 2.1 Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Equation de Schrödinger.
- Théorème de Riesz-Fischer.

### 2.2 Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité

- Alternative de Fredholm et application aux bases presque orthogonales.
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un Hilbert.

### 2.3 Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$  simple.
- Théorème de Hadamard-Lévy.

### 2.4 Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Riesz-Fischer.
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un Hilbert.

### 2.5 Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

- Alternative de Fredholm et application aux bases presque orthogonales.
- Théorème de Lyapunov.

### 2.6 Leçon 208 : Espaces vectoriels normés et applications linéaires continues. Exemples.

- Minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un Hilbert.
- Alternative de Fredholm et application aux bases presque orthogonales.

### 2.7 Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

- Théorème de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein.
- Théorème de Fejér.

### 2.8 Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples et applications.

- Minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un Hilbert.
- Alternative de Fredholm et application aux bases presque orthogonales.

### 2.9 Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème des Extrêmes-liés.

### 2.10 Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème des Extrêmes-liés.

- 2.11 Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**
- Théorème des Extrémas-liés.
  - Gradient à pas optimal.
- 2.12 Leçon 220 : Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.**
- Nombre de zéros d'une EDO.
  - Théorème de Hadamard-Lévy.
- 2.13 Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**
- Nombre de zéros d'une EDO.
  - Théorème de Lyapunov.
- 2.14 Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**
- Développement asymptotique d'une suite récurrente.
  - Théorèmes de Mertens.
- 2.15 Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites de fonctions.**
- Théorèmes de Mertens.
  - Nombre de zéros EDO.
  - Développement asymptotique d'une suite récurrente.
- 2.16 Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**
- Développement asymptotique d'une suite récurrente.
  - Gradient à pas optimal.
- 2.17 Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**
- Densité des fonctions continues dérivables nulle part.
  - Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.
- 2.18 Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**
- Théorème de Bohr-Møllerup.
  - Gradient à pas optimal.
- 2.19 Leçon 230 : Séries de Nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**
- Théorèmes de Mertens.
  - Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible.

**2.20 Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

- Théorème de Riesz-Fischer.
- Théorème de Fejér.

**2.21 Leçon 235 : Problèmes d'interversion en analyse.**

- Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible.
- Prolongement de la fonction  $\zeta$ .

**2.22 Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

- Un calcul d'intégrale.
- Formule des compléments.

**2.23 Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

- Equation de Schrödinger.
- Formule des compléments.

**2.24 Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

- Formule sommatoire de Poisson.
- Prolongement de la fonction  $\zeta$ .

**2.25 Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

- Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible.
- Problème des moments.

**2.26 Leçon 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.**

- Formule des compléments.
- Prolongement de la fonction  $\zeta$ .

**2.27 Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.**

- Formule Sommatoire de Poisson.
- Théorème de Fejér.

**2.28 Leçon 250 : Transformation de Fourier. Exemples et applications.**

- Equation de Schrödinger.
- Formule sommatoire de Poisson.

**2.29 Leçon 253 : Utilisation de la convexité en analyse.**

- Minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un Hilbert.
- Gradient à pas optimal.

**2.30 Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications**

- Le problème des moments.
- Marche aléatoire sur  $[0, 1]$ .
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .

**2.31 Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

- Marche aléatoire sur  $[0, 1]$ .
- Théorème de Pólya.

**2.32 Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .
- Théorème de Pólya.
- Théorème de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein.

**2.33 Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

- Marche aléatoire sur  $[0, 1]$ .
- Prolongement de la fonction  $\zeta$ .

**2.34 Leçon 266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.**

- Théorème de Pólya.
- Marche aléatoire sur  $[0, 1]$ .

**2.35 Leçon 267 : Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.**

IMPASSE