Définition 1. La lettre p désignera toujours un nombre premier. Ainsi la somme $\sum_{p\leq n}$ désigne une somme portant sur les nombres premiers inférieurs à n.

Remarque 1. Dans ce développement la fonction log désigne le logarithme népérien usuel et non le logarithme décimal.

Définition 2. On note π la fonction de comptage des nombres premiers, c'est-à-dire : $\pi(x) = |\{p \mid p \leq x\}|$.

Lemme 1. $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$, en particulier, $\sum_{p\leq n} \log(p) = O(n)$.

***Preuve*.**

On commence par montrer par récurrence forte sur n que $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$. L'initialisation est claire. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout $k < n$. Si n est pair le résultat est immédiat, on écrit donc à partir de maintenant $n = 2m+1$.
Soit maintenant $p \in [\![m+1; 2m+1]\!]$ alors $p \mid (2m+1)!$ et $p \nmid m!$. Donc par le lemme de Gauss :

$$p \mid \binom{2m+1}{m}$$

Donc encore par le lemme de Gauss :

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \mid \binom{2m+1}{m}$$

et

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{1}{2}\left(\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}\right) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} \leq \frac{1}{2}2^{2m+1} = 4^m$$

D' où :

$$\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq m+1} p \prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m 4^{m+1} = 4^{2m+1} = 4^n$$

Ce qui achève la récurrence.
On peut conclure, soit $t \in]1, n]$:

$$t^{\pi(n)-\pi(t)} = \prod_{t<p\leq n} t \leq \prod_{t<p\leq n} p \leq 4^n$$

ie

$$\pi(n) \leq n\frac{\log(4)}{\log(t)} + \pi(t) \leq n\frac{\log(4)}{\log(t)} + t$$

Le choix $t = \frac{n}{\log(n)}$ fournit la conclusion.

□

Le développement commence à partir de ce lemme :

Lemme 2. *(Formule de Legendre)*
Soit $n \geq 1$, alors :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

Preuve.

Comme $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ v_p(k)=l}} v_p(k) = \sum_{l=0}^{\infty} l \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ v_p(k)=l}} 1$$

Or les éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $v_p(k) \geq l$ sont les $p^l r$ avec $r \leq \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor$. Le nombre d'éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $v_p(k) = l$ vaut donc $\left\lfloor \dfrac{n}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{n}{p^{l+1}} \right\rfloor$. On peut maintenant terminer le calcul :

$$v_p(n!) = \sum_{l=0}^{\infty} l \left(\left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{l+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{l=0}^{\infty} l \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor - \sum_{l=1}^{\infty} (l-1) \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor = \sum_{l=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor$$

$\square$

Théorème 1. On a les estimations suivantes :

- (1er Théorème de Mertens) $\displaystyle\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} = \log(n) + O(1)$
- (2ème Théorème de Mertens) $\displaystyle\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \log(\log(n))$

Preuve.

On prouve d'abord le premier théorème.
On a pour $n \geq 1$ et d'après le lemme 1 :

$$\frac{n}{p} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq v_p(n!) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{n}{p^l} = \frac{n}{p-1}$$

Donc :

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \sum_{p \leq n} \log(p) \leq \sum_{p \leq n} v_p(n!) \log(p) \leq \sum_{p \leq n} \frac{n \log(p)}{p-1} = n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p(p-1)}$$

Or comme les facteurs premiers de $n!$ sont tous inférieur à n, $n! = \displaystyle\prod_{p \leq n} p^{v_p(n!)}$ ie $\log(n!) = \displaystyle\sum_{p \leq n} v_p(n!) \log(p)$.

Le lemme 1 fournit l'estimation : $\displaystyle\sum_{p \leq n} \log(p) = O(n)$ et de plus $\left(\displaystyle\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p(p-1)} \right)_n$ converge. On peut donc écrire :

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} + O(n) \leq \log(n!) \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} + O(n)$$

D'où $\displaystyle\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} = \frac{\log(n!)}{n} + O(1)$. Or par une comparaison série-intégrale,

$$\log(n!) = \sum_{1 \leq k \leq n} \log(k) = n \log(n) - n + O(1)$$

Et cela conclut la preuve du 1er théorème de Mertens.
On prouve maintenant le 2ème théorème :
On a :

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}=\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p}\frac{1}{\log(p)}=\sum_{2\leq k\leq n}\frac{b_k}{\log(k)}$$

Avec

$$b_k=\begin{cases}\frac{\log(k)}{k} & \text{si } k=p\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On peut écrire $b_k=a_k-a_{k-1}$ avec $a_n=\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p}$. On peut alors transformer l'expression précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}&=\sum_{2\leq k\leq n}\frac{a_k-a_{k-1}}{\log(k)}\\ &=\frac{a_n}{\log(n)}-\frac{a_1}{\log(2)}+\sum_{3\leq k\leq n}a_{k-1}\frac{\log\left(\frac{k}{k-1}\right)}{\log(k)\log(k-1)}\\ &=\underbrace{\frac{a_n}{\log(n)}}_{=O(1)}+\sum_{2\leq k\leq n-1}a_k\frac{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log(k+1)\log(k)}\end{aligned}$$

Or par le 1er théorème de Mertens :

$$a_k\frac{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log(k+1)\log(k)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{a_k}{k\log(k)^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k\log(k)}$$

Finalement, par sommation des relations de comparaisons pour les séries divergentes positives :

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{2\leq k\leq n}\frac{1}{k\log(k)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\log(\log(n)).$$

□

Remarque 2. Il y a un 3ème théorème de Mertens : $\prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log(n)}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right)$
Où γ désigne la constante d'Euler.

Remarque 3. Le 2ème théorème de Mertens peut etre précisé :

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}=\log(\log(n))+M+O(\frac{1}{\log(n)})$$

A noter que le fait de remplacer $O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$ en $o\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$ est équivalent au théorème des nombres premiers (résultat très difficile) qui donne l'équivalent suivant : $\pi(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{\log(n)}$

Référence Je ne connais pas de références exactes pour ce développement. Le lemme 1 se trouve dans "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres" de Gérald Tennenbaum. Ce livre donne également une preuve des théorèmes de Mertens mais elle est légèrement différente de celle présentée ici.