Théorème 1. Soit $E = \mathcal{C}^0[0,1]$ muni de la norme infinie. Alors l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans E.

Preuve.

On note $I = [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose :

$$U_{\varepsilon,n} = \{f \in E \mid \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, \quad |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}$$

La preuve va se dérouler en 3 étapes.

Première étape : $U_{\varepsilon,n}$ ouvert.

Montrons que $F_{\varepsilon,n} := U^c_{\varepsilon,n} = \{f \in E \mid \exists x \in I, \forall y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, |f(x) - f(y)| \leq n|x-y|\}$ est fermé. Soit $(f_p)_p \in F_{\varepsilon,n}^{\mathbb{N}}$ telle que $f_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans E ie $(f_p)_n$ converge uniformément vers f sur I. L'hypothèse sur la suite $(x_p)_p$ donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists x_p \in I, \forall y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon |f_p(x) - f_p(y)| \leq n|x_p - y|$$

Comme I compact, il existe une extractrice φ et $x \in I$ telle que $(x_{\varphi(p)})_p$ converge vers x. Soit $y \in I$ tel que $0 < |y-x| < \varepsilon$, alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $\left|y - x_{\varphi(p)}\right| < \varepsilon$. (Il suffit de prendre p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$, $\left|x - x_{\varphi(p)}\right| < \dfrac{\varepsilon - |x-y|}{2}$). Donc pour $p \geq p_0$

$$\frac{\left|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)}) - f_{\varphi(p)}\right|}{\left|x_{\varphi(p)} - y\right|} \leq n$$

Ce qui donne en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{x-y} \leq n$$

car

$$\left|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)} - f(x)\right| \leq \left|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)} - f(x_{\varphi(p)}\right| + \left|f(x_{\varphi(p)} - f(x)\right|) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le premier terme tendant vers 0 par convergence uniforme et le second par continuité de f en x. Donc $f \in F_{\varepsilon,n}$ et cela conclut.

Deuxième étape : $U_{\varepsilon,n}$ dense dans E.

Soit $f \in E$ et $\delta > 0$, on va prendre $g \in B(f,\delta) \cap U_{\varepsilon,n}$ de la forme $g(x) = f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N à déterminer. Il est immédiat que peu importe le choix de $N \in \mathbb{N}$, $g \in B(f,\delta)$. Soit maintenant $(x,y) \in I^2$ distincts :

$$\begin{aligned}\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} &= \frac{|f(x) - f(y) + \delta(\sin(Nx) - \sin(Ny)|}{|x-y|} \\ &\geq \left|\delta\frac{|\sin(Nx) - \sin(Ny)|}{|x-y|} - \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right|\right|\end{aligned}$$

Pour minorer uniformément le premier terme on va choisir N assez grand pour que le sinus oscille vite sur de petits intervalles, pour majorer uniformément le second terme on va utiliser l'uniforme continuité de f.

Plus précisément :
Par uniforme continuité de f :

$$\exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in I^2 |x-y| < \alpha \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\delta}{4}$$

On peut supposer $\alpha < \min(1,\varepsilon)$ ce que nous faisons par la suite. Soit maintenant $x \in I$, il existe $y \in I$ tel que :

$$2\pi < |Nx - Ny| < 4\pi \text{ et } |\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geq 1$$

On choisit N tel que $\frac{4\pi}{N} < \alpha$. L'inégalité précédente donne alors:

$$\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \geq \left| \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} \right| = \frac{\delta N}{8\pi}$$

Il suffit de choisir alors N assez grand pour que $\frac{\delta N}{8\pi} > n$, un tel N sera indépendant de x car n, α, δ le sont et pour un tel N on aura $g \in U_{\varepsilon,n}$ et cela conclut la deuxième étape.

Troisième étape : Conclusion
On peut maintenant conclure, soit $R = \bigcap_{n\geq 1} U_{\frac{1}{n},n}$, comme E muni de la norme infinie est un Banach, d'après le théorème de Baire l'ensemble :

$$R := \bigcap_{n\geq 1} U_{\frac{1}{n},n}$$

est dense dans E. Or si $f \in R$ alors pour tout $x \in [0,1]$ il existe $x_n \in I$ tel que $0 < |x - x_n| < \frac{1}{n}$ et :

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right| > n$$

Donc,

$$\sup_{n\geq 1} \left| \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right| = +\infty$$

et donc f n'est pas dérivable en x et cela conclut la preuve. □

Remarque 1. La référence de cette preuve se trouve dans "Gourdon Analyse".

Remarque 2. Si on présente un tel développement, il faut absolument connaitre des exemples de telles fonctions.

- Fonction de Weierstrass : $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ où $0 < a < 1$ et $ab > 1$.
- Soit $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ que l'on prolonge par 4-péridodicité sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^{2^n})}{2^n}$ est continue dérivable nulle part.

Remarque 3. En fait, ce qui compte vraiment c'est d'obtenir l'existence d'une fonction continue dérivable nulle part. Si on a un telle fonction f, alors l'ensemble

$$\left\{ P + \frac{f}{m} \mid P \in \mathbb{R}[X], m \geq 1 \right\}$$

est dense dans $[0,1]$ par le théorème de Weierstrass et ne contient que des fonctions continues dérivables en aucun point de I.

Remarque 4. Il est possible de remplacer la deuxième étape par :

Deuxième étape bis : $F_{\varepsilon,n}$ est d'intérieur vide.

En effet, si ce n'était pas le cas, il contient une boule $B(P,\delta)$ où $P \in [X]$ et $\delta > 0$ (par densité des polynômes dans E). Soit $t \in I$, qui vérifie la condition d'appartenance à $F_{\varepsilon,n}$. Soit $R > 0$, on construit alors une fonction g affine par morceaux définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq t-\eta \\ \frac{\delta}{\eta}(t-(x-\eta)) & \text{si } t-\eta \leq x \leq t \\ -\frac{\delta}{\eta}(x-(t+\eta)) & \text{si } t \leq x \leq t+\eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

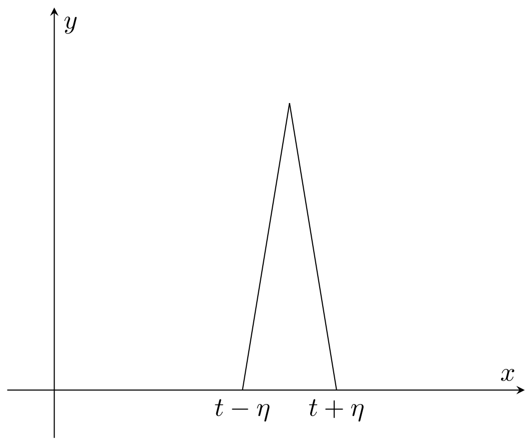

Figure 1: Le graphe de la fonction g

où l'on choisit $\eta > 0$ assez petit pour que $\eta < \dfrac{\delta}{R\varepsilon}$). Avec un tel choix de η, si $0 < |y-t| < \varepsilon$, alors :

$$\left|\frac{g(t)-g(y)}{t-y}\right| \geq \frac{\delta}{\eta\varepsilon} > R$$

On a alors $P + g \in B(P,\delta)$ et :

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| > R|x-y|$$

Si $M = \|P'\|_{\infty,[0,1]}$, on prend $R = M + n$ et on obtient :

$$\left|\frac{P(x)+g(x)-P(y)-g(y)}{x-y}\right| \geq \left|\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| - \left|\frac{P(x)-P(y)}{x-y}\right|\right| \geq |M+n-M| = n$$

et cela conclut.