Oraux Blancs MP*

Laurent Montaigu

Contents

1 Exercices Centrale

Exercice 1. (Solution)

1. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 2. (Solution)

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ? On note $\Gamma(x)$ cette intégrale quand elle est définie.
2. Montrer que :
   - $i)$ $\Gamma(1) = 1$.
   - $ii)$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   - $iii)$ $\log \circ \Gamma$ est convexe.
3. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $i)$, $ii)$ et $iii)$. Montrer : $f = \Gamma$.

Exercice 3. (Solution)
Soient (E, N), (E', N') deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $(y_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in E$, montrer que $\Gamma = \{(y_n)_n \mid n \geq 0\} \cup \{l\}$.
2. Soit $f : E \to E'$ telle que pour tout $K \subset E'$ compact, $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de E'.

Exercice 4. (Solution)
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid M^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\big\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, montrer : $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow |\det(M)| = 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^d = I_n$, étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ où $A = \frac{M-I_n}{3}$.
3. Montrer qu'il existe une constante K_n qui majore tous les cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2 Exercices Mines-Ponts

Exercice 5. (Solution)
Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^p$ diagonalisables et qui commutent.

1. Montrer que $A_1, \dots, A_p$ sont diagonalisables dans une même base.
2. Soit G un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_n\big\}$, montrer que G est fini et majorer son cardinal.
3. Soit n, m deux entiers, on suppose $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ isomorphes. Que dire de m et n ?

Exercice 6. (Solution)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- $i)$ Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda + \mu \neq 0$.
- $ii)$ $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $\exists! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $AM + MA = B$.

Exercice 7. (Solution)
On pose pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ et montrer qu'elle y est continue.
2. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
3. Ecrire f sous la forme d'une intégrale, en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 8. (Solution)
Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers pris dans l'ordre croissant. On pose $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge.
2. Montrer $v_n \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$.
3. Existe-il $C > 0$ telle que $\varphi(n) \geq Cn$ pour tout $n \geq 1$?

Exercice 9. (Solution)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer l'équivalence entre :

- $i)$ $\pi_f = \chi_f$.
- $ii)$ Il existe $x \in E$, $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Exercice 10. (Solution)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 11. (Solution)
Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

3 Exercices X-ENS

Exercice 12. (Solution)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que g est de carré intégrable et :

$$\int_0^\infty g^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13. (Solution)
On note $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telle que $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$ pour tout p premier et $\lambda(mn) = \lambda(n)\lambda(m)$ pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Déterminer le domaine de définition D de $N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n}$.

2. Pour $x \in D$, exprimer $N(x)$ en fonction de $b_n = \sum_{d|n} \lambda(d)$.

3. Calculer b_n pour $n \geq 1$.

4. Donner un équivalent de N en 1^-.

$\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^T & A' \end{pmatrix}$

Exercice 14. (Solution)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients réels et scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$.

4 Eléments de corrections

Solution 1. (Enoncé)
1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a<b$ dans I. Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n)}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

2. La fonction $f:t\mapsto\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 f$ converge. De plus pour $x>0$ en faisant un intégration par parties :

$$\int_1^x\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t=\left[-2\cos(\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_1^x-2\int_1^x\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t=\frac{-2\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+2\cos(1)-2\int_1^x\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

Donc comme $\int_1^x\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_1^\infty f$ converge.
3. Comme f est $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :

$$\left|f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_n^{n+1}(f(n)-f(t))\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_n^{n+1}\|f'\|_{,\infty[n,n+1]}(t-n)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\|f'\|_{\infty,[n,n+1]}$$

Or $f'(t)=\frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$ donc $\|f'\|_{\infty,[n,n+1]}\leq\frac{2}{n^32}$ et $\sum_{n\geq1}\left(f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge et donc $\sum_{n\geq1}f(n)$ aussi par la question 2.

Solution 2. (Enoncé)
1. La fonction $f:t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus $f(t)\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}$ donc $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $x>0$. comme $f(t)=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $\int_1^\infty f$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $\Gamma(x)$ est bien défini pour $x>0$.
2. $i)$ est immédiat, $ii)$ se fait par intégration par parties. Pour $iii)$: on vérifie facilement que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, pour vérifier la convexité de $\log\circ\Gamma$, il suffit de vérifier que $(\log\circ\Gamma)''\geq0$ *i.e.* $\Gamma''\Gamma\geq\Gamma'^2$, or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Gamma'^2(x)=\left(\int_0^\infty\left(\log(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\int_0^\infty\log(t)^2t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\Gamma''(x)\Gamma(x)$$

3. Soit f vérifiant $i)$, $ii)$ et $iii)$. Alors pour $x\in]0,1[$, l'inégalité des 3 pentes appliquée à $g(x)=\log(f(x))$ donne :

$$\frac{g(n)-g(n-1)}{n-(n-1)}\leq\frac{g(x+n)-g(n)}{x+n-n}\leq\frac{g(n+1)-g(n)}{n+1-n}$$

Or par $i)$ et $ii)$, $g(n)=\log((n-1)!)$ pour $n\geq1$, d'où :

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}\leq f(x)\leq\frac{n^x(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}$$

Les deux termes de cet encadrement sont équivalents quand $n\to+\infty$, donc

$$\forall x\in]0,1[,\,f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}$$

Or Γ vérifie $i)$, $ii)$ et $iii)$ et le membre de droite ne dépend pas de f, donc $f=\Gamma$ sur $]0,1[$ et finalement $f=\Gamma$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $ii)$.

Solution 3. (Enoncé)
1. Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de Γ distinguons deux cas :
Soit y_n prend une même valeur une infinité de fois alors on peut construire une suite extraite de y_n qui est constante et donc convergente. Dans l'autre cas tous les éléments de Γ sont atteints qu'un nombre fini de

fois par y_n et nous allons montrer que $(y_n)_n$ converge vers x. Soit $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $\|x_n - x\| < \epsilon$. Par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$ $y_n \in \{x_k | k \geq n_0\} \cup \{x\}$. Donc pour $n \geq n_1$ $\|y_n - x\| < \epsilon$.
2. Soit G un fermé de E montrons que $f(G)$ est un fermé de E'. Soit $(y_n)_n \in f(G)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in E'$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ il existe $x_n \in G$ tel que $y_n = f(x_n)$ Posons $\Gamma = \{y_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ qui est un compact. Par hypothèse $f^{-1}(\Gamma)$ est un compact de E et comme $(x_n)_n \in f^{-1}(\Gamma)$ on peut extraire une sous suite de $(x_n)_n$ la conclusion est immédiate.

Solution 4. (Enoncé)
1. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors en prenant le déterminant dans $MM^{-1} = I_n$ et en utilisant que $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$, nécessairement $\det(M) = \pm 1$. Inversement, si $|\det(M)| = 1$ alors $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \mathrm{com}(M)^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
2. La matrice M est annulée par le polynôme annulateur $X^d - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, d'où M est diagonalisable de valeur propre des racines d-ème de l'unité. Ecrivons $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Donc, $A = \dfrac{M - I_n}{3} = P \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n - 1}{3} \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc $B^q = P \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{3}\right)^q & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n - 1}{3}\right)^q \end{pmatrix} P^{-1}$.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$, $\left| \dfrac{\lambda_i - 1}{3} \right| \leq \dfrac{2}{3} < 1$ donc $A^q \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et Φ le morphisme de réduction mod 3, il suffit de montrer que Φ est injective. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, en utilisant le théorème de Lagrange, M vérifie $M^d = I_n$ avec $d = |G|$. En utilisant les notations de la question précédente, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ car $M \in \ker(\Phi)$ et donc il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A^{q_0} = 0$, A est une matrice nilpotente diagonalisable donc $A = 0$ et $M = I_n$ et Φ est bien injective.

Solution 5. (Enoncé)
1. On fait une récurrence sur la dimension, pour le cas $n = 1$ il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour tout rang inféieur ou égal à $n - 1$. Si tous les A_i sont des homothéties, le résultat est immédiat. Sinon, il existe A_i avec un espace propre $E_\lambda(A)$ non trivial, il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $E_\lambda(A)$ et $\oplus_{\mu \neq \lambda \in \mathrm{Sp}(A_i)} E_\mu(A)$ et de faire la réunion des bases obtenues pour conclure.
2. Tous les éléments de G vérifient $M^2 = I_n$ donc (résultat classique) G est commutatif, de plus tous les éléments de G sont diagonalisables avec des valeurs propres ± 1. Par co-diagonalisation, G est conjugué à un sous-groupe de :

$$\Omega_n = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix} \mid \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Donc G est fini de cardinal $\leq 2^n$.
3. Soit $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ un isomorphisme, $\Phi(\Omega_n)$ est alors un sous-groupe de cardinal 2^n de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ qui vérifie les hypothèses de la question précédente donc $|\Phi(G)| \leq 2^m$ et donc $n \leq m$. Par symétrie, $n = m$.

Solution 6. (Enoncé)
$i) \implies ii)$. On introduit l'application φ_A définie par $\varphi_A(M) = AM + MA$ et $ii)$ correspond à la bijectivité de φ_A. Comme A est une matrice symétrique, φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, il suffit de montrer que φ_A est injective. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0$. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée, soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de diagonalisation associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A. D'où :

$$AMX_i = -MAX_i = -\lambda_i MX_i$$

Donc si MX_i était non nul, $-\lambda_i$ serait valeur propre de A ce qui est exclu. Donc $MX_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et donc finalement $M = 0$.
$ii) \implies i)$. Par contraposée, supposons qu'il exist e une valeur propre de λ de A telle que $-\lambda$ soit aussi

une valeur propre de A. Soit X un vecteur propre associé à λ et Y un vecteur propre associé à $-\lambda$. Soit $M = XY^T$, comme X et Y sont non nuls, $M \neq 0$. De plus,

$$AM + MA = AXY^T + XY^T A = \lambda XY^T - \lambda XY^T = 0$$

Donc φ_A n'est pas injective et donc pas bijective.

Solution 7. (Enoncé)
1. Par le critère de convergences des séries alternées, il est clair que f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \geq 1\}$. Soit K un compact de D, chaque f_n est continue sur D, soit $R = \sup_{x \in D} |x|$, alors. pour $n > R$:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{n-R} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par convergence uniforme f est continue.
2. On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x} + g(x)$ avec g continue en 0 par le même raisonnement que la question précédente, d'où :

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

3. On utilise la relation $\frac{1}{n+x} = \int_0^1 t^{n+x-1} \, \mathrm{d}t$. Donc,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{n+x-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x}{t(1+t)} \, \mathrm{d}t$$

La permutation étant justifiée par convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $[0,1]$. Le changement de variable $u = t^x$ donne :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{1 + u^{\frac{1}{x}}} \mathrm{d}u$$

Par le TCD, il est clair que cette dernière intégrale tend vers $\frac{1}{2}$.

Solution 8. (Enoncé)
Comme $(\frac{1}{p_n})$ est une suite à valeurs positives qui tend vers 0, $\ln(1 - \frac{1}{p_n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$ et donc :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n} \text{ CV } \iff -\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n}) \text{ CV } \iff v_n \text{ CV}$$

Où la dernière équivalence se déduit du passage à l'exponentielle.
2. On peut écrire par développement en série géométrique :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j} = \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(p_1)^{j_1} \ldots (p_n)^{j_n}} = \sum_{P^+(k) \leq p_n} \frac{1}{k}$$

où $P^+(k)$ désigne le plus grand facteur premier de k et par convention $P^+(1) = 1$. Or tout entier n vérifie $P^+(n) \leq n \leq p_n$ donc $v_n \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$.
3. Par les deux question précédentes, $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Supposons par l'absurde d'une telle constante C, alors on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{v_n} = \frac{\varphi(\prod_{k=1}^{n} p_k)}{\prod_{k=1}^{n} p_k} \geq C$$

ce qui n'est pas possible.

Solution 9. (Enoncé)
Le sens $ii) \implies i)$ est immédiat, en effet si $\deg(\pi_f) < n$, alors la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée et donc pour tout x la famille $(x, \ldots, f^{n-1})$ est liée.
Inversement, comme f diagonalisable et $\pi_f = \chi_f$, f possède n valeurs propres disctinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, soit

$(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres associés, montrons que $x=\sum_{i=1}^n e_i$ vérifie $(x,\dots,f^{n-1}(x))$ libre. Soit $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1})\in K^n$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i f^i(x)=0$. Or pour $i\geq 0$,

$$f^i(x)=\sum_{j=1}^n f^i(e_j)=\sum_{j=1}^n \lambda_j^i e_j$$

Donc,

$$0=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i f^i(x)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\lambda_j^i e_j=\sum_{j=1}^n P(\lambda_j)e_j$$

où $P=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i X^i$, comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, $P(\lambda_1)=\cdots=P(\lambda_n)=0$ donc P a n racines distinctes et comme $\deg(P)\leq n-1$, P est nul d'où le résultat.

Solution 10. (Enoncé)
Le polynôme $P=X^{12}-1$ annule A et est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses deux valeurs propres sont de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ pour $\theta\in[0,2\pi]$. En écrivant $A=P\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P^{-1}$ on a $\chi_A=X^2-2\cos\theta X+1$ or comme $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\chi_A\in\mathbb{Z}[X]$ donc $2\cos\theta\in\mathbb{Z}$ et enfin $\cos\theta\in\left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$ *i.e.* $\theta\in\left\{\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},0\right\}$. On vérifie aisément que dans chaque cas $A^{12}=I_2$

Solution 11. (Enoncé)
Un simple calcul donne $M^2=\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & BA\end{pmatrix}$ et donc $M^{2p}=\begin{pmatrix}(AB)^p & 0\\ 0 & (BA)^p\end{pmatrix}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. Donc si M est diagonalisable alors M^2 aussi et en prenant un polynôme annulateur de M^2 on en déduit que AB est diagonalisable. Montrons que la réciproque est vraie. Comme A est inversible, AB et BA sont semblables donc si AB est diagonalisable alors BA aussi et on en déduit que M^2 est diagonalisable. Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Ker}(M^2)$ pour conclure. Or c'est immédiat car comme A et B sont inversibles donc M l'est aussi (d'inverse $\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$).

Solution 12. (Enoncé)
On pose pour $x\geq 0$, $h(x)=2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$ et $l(x)=\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $x\geq 0$, $g(x)^2=f(x)^2-2h(x)f(x)+h(x)^2$ et donc en intégrant de 0 à x :

$$\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t-2\int_0^x h(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x h(t)^2\,\mathrm{d}t$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)^2\,\mathrm{d}t&=\int_0^x 4e^{-2t}l(t)^2\,\mathrm{d}t\\ &=-2e^{-2x}l(x)^2+4\int_0^x e^{-2t}l'(t)l(t)\,\mathrm{d}t\\ &=-2e^{-2x}l(x)^2+4\int_0^x e^{-t}f(t)l(t)\,\mathrm{d}t\\ &=-2e^{-2x}l(x)^2+2\int_0^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t-2e^{-2x}l(x)^2$$

Donc il suffit de montrer que $e^{-2x}l(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ soit encore $e^{-x}l(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\int_A^\infty f(x)^2\,\mathrm{d}x < \epsilon^2$.
Donc pour $x \geq A$,

$$e^{-x}l(x) = e^{-x}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-x}\int_A^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t \leq e^{-x}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{e^{-x}\sqrt{\int_A^x e^{2t}\,\mathrm{d}t}}_{\leq 1}\underbrace{\sqrt{\int_A^x f(t)^2\,\mathrm{d}t}}_{\leq\epsilon} \leq$$

$$e^{-x}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t + \epsilon$$

Or $e^{-x}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui conclut.

Solution 13. (Enoncé)
1. Il est clair que $|\lambda(n)| = 1$ pour tout $n \geq 1$ donc N est bien définie sur $]-1,1[$ car $|\lambda(n)\frac{x^n}{1-x^n}| = \frac{|x|^n}{|1-x^n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$. Si $x = \pm 1$ alors le terme général de la série définissant N n'est pas défini, si $|x| > 1$ alors la série est grossièrement divergente, d'où $D =]-1,1[$.
2. Soit $x \in D$, alors la famille $(\lambda(n)x^{nk})_{n,k\geq 1}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets, il vient :

$$N(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(n)x^{nk} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{nk=p}\lambda(n)x^{nk} = \sum_{p=1}^{\infty} b_p\lambda(p)$$

3. Il est clair que $b_1 = 1$ Soit $n \geq 2$, on écrit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors :

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_k}^{\alpha_k}\lambda(p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}) \\
&= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}(-1)^{\alpha_1}\right)\dots\left(\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}(-1)^{\alpha_k}\right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i \text{ pair pour tout } i \geq 1. \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}$$

4. Par la question précédente, il vient $N(x) = \sum_{n=1}^\infty x^{n^2}$, par comparaison série-intégrale en utilisant la fonction $f_x(t) = x^{t^2}$ on trouve que :

$$\int_1^\infty f_x(t)\,\mathrm{d}t \leq N(x) \leq \int_0^\infty f_x(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$N(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \int_0^\infty e^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

Solution 14. (Enoncé)
On peut écrire $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$, il faut donc montrer $\frac{P^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\frac{P^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \leq \frac{P^{(k)}(0)^2}{k!^2}$ soit encore :

$$\frac{k}{k+1}P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) \leq P^{(k)}(0)^2$$

Il suffit alors de montrer que $P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) \leq P^{(k)}(0)^2$, ce qui en notant $Q = P^{(k-1)}$ revient à montrer $Q(0)Q''(0) \leq Q'(0)^2$, on reconnait ici la dérivée de $\frac{Q'}{Q}$ en 0. On peut supposer que 0 n'est pas racine de Q

car sinon le résultat est clair. Remarquons maintenant que par le théorème de Rolle, Q est scindé sur $\mathbb{R}$, en écrivant la décomposition en élément simples

$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - a_i}$$

Il vient,

$$\left(\frac{Q'}{Q}\right)'(0) = \sum_{i=1}^{r} -\frac{m_i}{a_i^2} \leq 0$$

Et cela conclut.