Théorème 1. Pour $\alpha \in]-1,1[$, $I(\alpha) := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$.

***Preuve*.**

Commençons d'abord par montrer que l'intégrale converge :

- La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$.
- On a l'équivalent suivant en 1 $\dfrac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{\log(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc h se prolonge par continuité en 1.
- On a l'équivalent suivant en 0 $\dfrac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1} \underset{x\to 0}{\sim} -x^\alpha \log(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)$ avec $\varepsilon > 0$
- $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ avec $\varepsilon > 0$ en $+\infty$

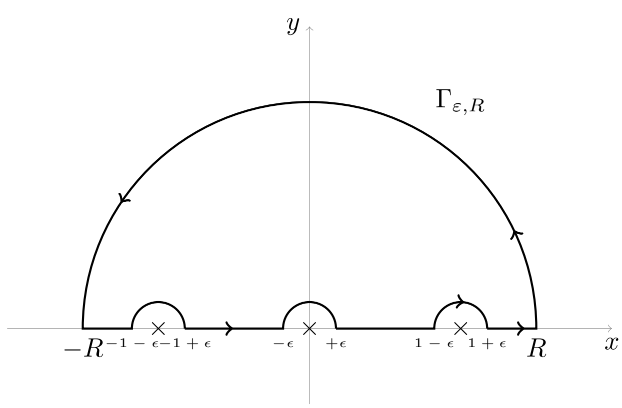
Donc $I(\alpha)$ est bien convergente.
Considérons la détermination Log du logarithme complexe sur $U := \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ telle que :

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(z) + i\arg(z)$$

où $\arg(z)$ est l'unique argument de z dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
Soit f la fonction définie sur U par :

$$\forall z \in U, f(z) = \frac{z^\alpha \mathrm{Log}(z)}{z^2-1}$$

On considère pour $1 > \varepsilon > 0$ et $R > 1$ le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ suivant :



La fonction f est méromorphe sur U avec (a priori) des pôles simples en ± 1. Par le théorème des résidus, $\displaystyle\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z = 0$. On note $\gamma_{a,\varepsilon}$ le demi-cercle de centre a et de rayon $\varepsilon > 0$. Les contributions de l'intégrale sur les demi-cercles centrés en 0 sont :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(re^{it})rie^{it}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{r^{\alpha+1}\left|\mathrm{Log}(re^{it})\right|}{|r^2e^{2it}-1|}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{r^{\alpha+1}(|\ln(r)+t)|}{|r^2-1|}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc comme $0<1+\alpha<2$, $\displaystyle\int_{\gamma_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand $r\to 0^+$ et quand $r\to+\infty$.
On s'intéresse maintenant aux deux pôles de f.
Le résidu en 1 vaut :

$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z^{\alpha}\mathrm{Log}(z)}{z+1}=0$$

donc la singularité en 1 est effacable et $\displaystyle\int_{\gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Le résidu en -1 vaut

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{z^{\alpha}\mathrm{Log}(z)}{z-1}=(-1)^{\alpha}\frac{i\pi}{2}$$

On peut donc écrire $f(z)=\dfrac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1}+g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de -1. On peut donc calculer :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}}\left(\frac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1}+g(z)\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}}\frac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z+\underbrace{\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} g(z)\,\mathrm{d}z}_{\underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow}0} \\ &\underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} i\pi\,\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{\pi^2}{2}e^{i\pi\alpha}\end{aligned}$$

On peut maintenant s'intéresser aux segments reliant les cercles. Notons :

$$J_\varepsilon=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{\alpha}\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\quad K_{\varepsilon,R}=\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{x^{\alpha}\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\quad N_\varepsilon=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{\alpha}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{x^{\alpha}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Le découpage de l'intégrale sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$ et le théorème des résidus donne :

$$0=J_\varepsilon+\int_{\gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z+K_{\varepsilon,R}+\int_{\gamma_{0,R}} f(z)\,\mathrm{d}z-\int_{-R}^{-1-\varepsilon}\frac{x^{\alpha}\mathrm{Log}(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x-\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z-\int_{-1+\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{x^{\alpha}\mathrm{Log}(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x-\int_{\gamma_{0,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Or,

$$\int_{-R}^{-1-\varepsilon}\frac{x^{\alpha}\mathrm{Log}(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \underset{u=-x}{=} \int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{(-u)^{\alpha}\mathrm{Log}(-u)}{u^2-1}\mathrm{d}u=\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{(-u)^{\alpha}(\ln(u)+i\pi)}{u^2-1}\mathrm{d}u=e^{i\pi\alpha}K_{\varepsilon,R}+i\pi e^{i\pi\alpha}M_{\varepsilon,R}$$

De même,

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{x^{\alpha}\mathrm{Log}(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=e^{i\pi\alpha}J_\varepsilon+i\pi e^{i\pi\alpha}N_\varepsilon$$

D'où :

$$0 = (1+e^{i\pi\alpha})(J_\varepsilon + K_{\varepsilon,R}) + i\pi e^{i\pi\alpha}(N_\varepsilon + M_{\varepsilon,R}) + \int_{\gamma_{0,R}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{0,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

En multipliant par $e^{-i\pi\alpha}$ et en prenant la partie réelle on a :

$$0 = \mathrm{Re}(1+e^{-i\pi\alpha})(J_\varepsilon + K_{\varepsilon,R}) + \mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_{0,R}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{0,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$ on obtient finalement :

$$I(\alpha)(1+\cos(\pi\alpha)) - \frac{\pi^2}{2} = 0$$

ce qui donne enfin :

$$I(\alpha) = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$

□

Remarque 1. C'est un développement assez long, il faut être à l'aise avec le calcul d'intégrales dans le plan complexe.

Remarque 2. La formule se trouve dans le livre "Analyse complexe pour la license 3" de Patrice Tauvel mais il y a beaucoup moins de détail.