Théorème 1. Soit $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On note $X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|X}$ admet un extremum local en a et les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

Pour la preuve du théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1. Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur U telle que $dg(a)$ surjective. Alors il existe $V \subset U$ ouvert tel que l'application h définie sur U par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U, \quad h(x) = (g_1(x), \dots, g_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur son image W.

Preuve.

Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que le matrice :

$$B := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le p}$$

est inversible. La matrice Jacobienne de h est alors la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} B & (\star) \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

qui est inversible, le théorème d'inversion locale fournit exactement la conclusion. $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème

Preuve.

Par hypothèse sur les fonctions $(g_i)_i$, l'ensemble X vérifie les hypothèses d'une sous variété au point a. On peut alors définit l'espace tangent T_aX de X en a comme :

$$T_aX = \left\{v \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon > 0, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v\right\}$$

Remarquons d'abord que l'application $df(a)$ est nulle sur l'espace tangent. En effet, soit $v \in T_aX$ associé à γ, alors la fonction réelle de la variable réelle

$$t \mapsto f(\gamma(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et admet un extremum en $t = 0$ donc y est de dérivée nulle d'où :

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df(a) \cdot \gamma'(0) = df(a) \cdot v$$

Montrons ensuite que $T_aX = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(dg_i(a))$. On procède pour cela par double inclusion.

$\subset$: Soit $v \in T_aX$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[$ un chemin associé, alors pour tout $1 \le i \le r$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $g_i(\gamma(t)) = 0$ donc $(g_i \circ \gamma)'(0) = 0$ et le même calcul que précédemment conclut.

$\supset$: Soit $v \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(dg_i(a))$. Par hypothèse, $dg(a)$ est surjective, soit $h : V \to W$ donné par le lemme. On pose pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_1(t) = h(a) + t dh(a) \cdot v$$

Le chemin γ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma_1(0) = h(a) \in W$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $|t| < \varepsilon$, $\gamma_1(t) \in W$, montrons alors que le chemin $\gamma := h^{-1} \circ \gamma_1$ convient ($i.e$ permet d'avoir $v \in T_aX$) :

- γ est bien défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et est de classe. $\mathcal{C}^1$ par composée de fonctions qui le sont.
- $\gamma(0) = h^{-1}(\gamma_1(0)) = h^{-1}(h(a)) = a$
- $\gamma'(0) = d(h^{-1})(\gamma_1(0)) \cdot \gamma_1'(0) = (dh(a))^{-1} \cdot h(a) \cdot v = v$

On a donc :

$$T_aX = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(dg_i(a)) \subset \mathrm{Ker}(df(a))$$

Donc,

$$\{dg_1(a), \dots, dg_r(a)\}^0 \subset \{df(a)\}^0$$

Où l'on rapelle que pour $B \subset (\mathbb{R}^n)^\star$, $B^0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$. On a la relation immédiate : $\{\varphi\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'ou en passant à l'orthogonal :

$$\mathrm{Vect}(df(a)) \subset \mathrm{Vect}(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$$

Et cela conclut. $\square$

Remarque 1. Il ne faut pas oublier de faire des dessins quand on présente ce développement (dessin d'un plan tangent, des chemins γ).

Remarque 2. Je ne connais pas de références qui détaille autant ce développement mais je n'ai pas beaucoup cherché.

Remarque 3. Pour des applications de ce théorème on pourra consulter "Les maths en tête, Analyse" de Xavier Gourdon et "Petit guide du calcul différentiel" de François rouvière.

Remarque 4. Il est possible de faire une preuve qui n'utilise pas les sous-variétés mais elle est beaucoup moins géométrique et le jury ne l'aime pas trop.