Théorème 1 (Équation de Schrödinger)**.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que :

- *i)* $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.
- *ii)* $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = f(x)$
- *iii)* $x \mapsto u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \forall T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad M_{k,l}^T := \sup_{|t|\leq T} \| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) \|_\infty < +\infty.$$

De plus, la fonction u est donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Preuve.

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction satisfaisant *i)*, *ii)* et *iii)*. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, comme $u(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut prendre sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x$$

On va montrer que $t \mapsto \hat{u}(\xi,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)e^{-ix\xi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\xi}$ est mesurable.
- $\forall T > 0$, $\forall |t| \leq T$, $\left| \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ix\xi} \right| \underset{i)}{=} \left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq \dfrac{M_{0,2}^T + M_{1,2}^T}{1+x^2}$

Donc par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $t \mapsto \hat{u}(\xi,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x$$

On a donc en utilisant *i)* et en faisant des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= i \int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\
&= i \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= -\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\
&= -i\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\
&= -i\xi^2 \hat{u}(\xi,t)
\end{aligned}$$

Où les crochets sont nuls car $u(\cdot,t)$ ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissances rapides.
Donc en résolvant l'équation différentielle en t à ξ fixé :

$$\exists A(\xi) \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \hat{u}(\xi,t) = Ae^{-i\xi^2 t}$$

Or on a de plus par $ii)$:

$$A(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

On a donc pour $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

Synthèse : Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

Comme $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, une application immédiate du théorème de dérivation des intégrales à paramètres montre que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie $i)$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi = f(x)$$

Par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Il reste à vérifier la condition $iii)$. Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
\left| 2\pi x^k \frac{\partial u}{\partial x^l} \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k i^l \xi^l \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(i^l \xi^l \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} \right) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi \right| \qquad \text{(IPP)}
\end{aligned}$$

Donc pour $T > 0$ et $|t| \leq T$,

$$\begin{aligned}
\left| 2\pi x^k \frac{\partial u}{\partial x^l} \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\xi^l \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} \right) \right| \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \left| \frac{\partial(\xi^l \hat{f})}{\partial \xi^m} \right| \left| P_m(\xi, t) e^{-i\xi^2 t} \right| \mathrm{d}\xi \qquad \text{(Leibniz)} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \left| \frac{\partial(\xi^l \hat{f})}{\partial \xi^m} \right| |P_m|(|\xi|, T) \mathrm{d}\xi \\
&\leq \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial(\xi^l \hat{f})}{\partial \xi^m} \right| |P_m|(|\xi|, T) \mathrm{d}\xi \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Où $|P_m|$ est un polynôme à coefficients positifs à deux variables.
L'intégrale est finie car $\frac{\partial(\xi^l \hat{f})}{\partial \xi^m} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc son intégrale contre un polynôme est finie. □

Remarque 1. C'est assez long et calculatoire, il faut absolument se garder du temps pour bien expliquer les derniers calculs.

Remarque 2. On peut aussi le faire avec l'équation de la chaleur en remplaçant la condition initiale par une condition au limite mais cela devient probablement trop long.

Remarque 3. La proposition est dans le livre "Partial differential equations" de Rauch mais il y a beaucoup moins de détails.