Correction de l'exercice 27.

1. On cherche le point D de coordonnées (x, y) tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. D'après le cours, $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 10-x \\ -3-y \end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -5 = 10 - x \\ -8 = -3 - y \end{cases}$$

soit encore $x = 15$ et $y = 5$. Le point D a donc pour coordonnées $(15, 5)$.

2. La longueur du segment $[AB]$ est donnée par la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, que l'on note $\|\overrightarrow{AB}\|$. On a :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{89}.$$

On calcule de même,

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}.$$

et enfin,

$$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{13^2 + 3^2} = \sqrt{178}.$$

Le triangle ABC a deux côtés de même longueur donc est isocèle. De plus, le point commun de ces deux côtés est A donc le triangle ABC est isocèle en A.

3. Le point I a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

4. On cherche le point J de coordonnées (x_J, y_J) tel que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IA}$. On calcule d'une part :

$$\overrightarrow{BJ} = \begin{pmatrix} x_J + 3 \\ y_J + 6 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc en identifiant abscisse et ordonnée des deux vecteurs :

$$x_J + 3 = \frac{7}{2} \text{ et } y_J + 6 = \frac{29}{2},$$

soit encore :

$$x_J = \frac{1}{2} \text{ et } y_J = \frac{17}{2}.$$

5. Le milieu de $[IJ]$ est le point de coordonnées :

$$\left(\frac{x_I + x_J}{2}, \frac{y_I + y_J}{2}\right) = \left(\frac{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}}{2}, \frac{-\frac{9}{2} + \frac{17}{2}}{2}\right) = (2, 2),$$

ce qui correspond bien aux coordonnées du point A.

6. On cherche le point K de coordonnées (x_K, y_K) tel que $2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$. On a donc :

$$2\begin{pmatrix} x_K - \frac{1}{2} \\ y_K - \frac{17}{2} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x_K - 10 \\ y_K + 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_K - 2 \\ y_K - 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\begin{cases} 2x_K - 1 + 3x_K - 30 - 2x_K + 4 = -16 + 5 \\ 2y_K - 17 + 3y_K + 9 - 2y_K + 4 = 10 + 8 \end{cases}$$

et donc enfin,

$$\begin{cases} 3x_K - 27 = -11 \\ 3y_K - 4 = 18 \end{cases}$$

et donc $x_K = \frac{16}{3}$ et $y_K = \frac{22}{3}$.

7. Il suffit de vérifier que (par exemple) les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{DJ} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DK} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$-\frac{29}{2} \times \frac{7}{3} - \frac{7}{2} \times \left(-\frac{29}{3}\right) = 0,$$

ce qui est bien le cas.
On pouvait aussi montrer que les deux fractions :

$$\frac{-\frac{29}{3}}{-\frac{29}{2}} \text{ et } \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}}$$

sont égales.

On peut représenter tous les points de l'exercice :