

# Exercices Outils Mathématiques

4TPU101U

2025-2026



---

# Avant-Propos

Basé sur les acquis de la spécialité mathématiques de la classe de première, le programme reprend les grandes lignes du programme de spécialité mathématiques de la classe de terminale qu'il enrichit de nouvelles connaissances et compétences mathématiques, elles-mêmes reliées à des thèmes d'étude où les notions sont mises en situation dans divers champs disciplinaires.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, il faut disposer d'automatismes. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul.

Certains exercices sont des exercices types d'autres disciplines que les mathématiques. Le problème mathématique sous-jacent en a été extrait. Le contexte originel étant lui aussi reproduit juste avant l'exercice. Il est souvent précédé d'une icône, dont voici la légende :



: Physique



: Géologie



: Informatique



: Sciences de l'ingénieur



: Biologie



: Chimie

Des exercices de ce fascicule sont extraits de :

- Fleurant S., Fleurant C. Bases de mathématiques pour la géologie et la géographie.
- Grolier J., Riss J. Mathématiques pour les Sciences de la Terre. Ed. Masson, 1997.



---

# Table des matières

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 1 Révisions                  | 7  |
| 2 Géométrie Plane            | 11 |
| 3 Notions de fonctions       | 15 |
| 4 Dérivée d'une fonction     | 19 |
| 5 Etude de fonctions         | 21 |
| 6 Fonctions circulaires      | 25 |
| 7 Produit scalaire           | 29 |
| 8 Fonctions exponentielles   | 37 |
| 9 Fonctions logarithmiques   | 41 |
| 10 Intégrales                | 47 |
| 11 Equations différentielles | 53 |
| 12 Solutions                 | 59 |



# Chapitre 1

## Révisions

### Exercice 1 Opposé-Inverse (Solution)

Soit  $x$  un réel.

- L'opposé de  $x$  est ...
- On suppose  $x$  non nul. L'inverse de  $x$  est ...

Donner, lorsque c'est possible l'opposé puis l'inverse de chacun de ces nombres :

$$a = 2 \quad b = \frac{3}{7} \quad c = \frac{11}{7} \quad d = 0 \quad e = \frac{1}{4} \quad f = -\sqrt{5}$$

### Exercice 2 Fractions et opérations (Solution)

Soit  $(a, c) \in \mathbb{R}^2$  et  $(b, d) \in (\mathbb{R}^*)^2$ .

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{d} = \dots \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \dots \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \dots \quad (\text{si } c \neq 0).$$

Calculer sans calculatrice les nombres suivants :

a)  $-5 - 2$

b)  $3 - 7$

c)  $3 + 5 \div 5 + 3$

d)  $3 + \frac{1}{3}$

e)  $-\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$

f)  $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}$

g)  $9 \times \frac{35}{9}$

h)  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$

i)  $\frac{7}{5} \div \frac{3}{10}$

j)  $-\frac{4}{5}$

k)  $\frac{\frac{4}{9}}{-\frac{3}{2}}$

l)  $\frac{1}{3} + \frac{7}{3} \times \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\right)$

### Exercice 3 Puissances (Solution)

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  et  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ .

- $a^n = \dots \quad a^{-n} = \dots$
- $a^{n+m} = \dots \quad \frac{a^n}{a^m} = \dots \quad (a^n)^m = \dots$
- $(ab)^n = \dots \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \dots$

Simplifier :

a)  $(-2)^3$

b)  $5^2$

c)  $3 \times 2^3$

d)  $4^2 \times 4^5 \times (4^3)^2$

e)  $(9^3)^7$

f)  $\frac{2^{12}}{2^5}$

g)  $7^9 \times 2^9$

h)  $\frac{(5^3)^4}{(5^4)^5}$

i)  $\frac{3^3 \times 7^4 \times (3^2)^3}{3^8 \times (7^2)^2}$

j)  $\frac{30 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{11} \times 200 \times 10^{13}}$

k)  $\left(\frac{5}{8}\right)^8 \left(\frac{-25}{9}\right)^{-4}$

l)  $(3a^4b^3) \times (8ab^2)$

**Exercice 4** Racines (Solution)

- Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}^{+*}$   $\sqrt{a}\sqrt{b} = \dots$   $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dots$

- Attention, en général  $\sqrt{a+b} \neq \dots$

- Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé la courbe de la fonction qui a pour expression sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Déterminer les coordonnées du point de la courbe  $f$  d'abscisse  $x_1 = -1.5$ , puis celles du point d'abscisse  $x_2 = 1.5$ . Que remarque-t-on pour les ordonnées ?

Représenter ensuite la courbe de la fonction qui a pour expression sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ . Déterminer les coordonnées du point de la courbe  $g$  d'abscisse  $f(x_1)$  qui est égale à l'ordonnée obtenue précédemment. En déduire :

$$\sqrt{(-1.5)^2} \text{ et } \sqrt{(1.5)^2}.$$

Plus généralement  $\sqrt{a^2} = \dots$

Simplifier sans calculatrice :

a)  $\sqrt{136^2}$

b)  $\sqrt{\frac{81}{36}}$

c)  $\sqrt{121 \times 7^2}$

d)  $2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$

e)  $-2\sqrt{72} + 4\sqrt{98}$

f)  $\sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27}$

g)  $\sqrt{144 \times 36 \times 12}$

h)  $\sqrt{\frac{16}{27}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{50}}$

i)  $\sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{125}$

**Exercice 5** Développement et réduction (Solution)

Développer et réduire les expressions suivantes :

a)  $x(2x + 1)$

b)  $3x(-2x + 2)$

c)  $5x^2(x + 7)$

d)  $\frac{-4x}{3}(-6x + 9)$

e)  $3(2x + 1)(-x)$

f)  $(5x - 2)(2x + 3)$

g)  $2x^2(x^2 + 5x + 9) - 2x^2 - 15x$

h)  $5(2x - 8)(1 + 3x)$

i)  $(5 - 2x)(2x + 1) + (10 - 4x)(x - 3)$

**Exercice 6** Identités remarquables (Solution)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- $(a + b)^2 = \dots$

- $(a - b)^2 = \dots$

- $(a - b)(a + b) = \dots$

Développer ou calculer sans la calculatrice :

a)  $(x + 5)^2$

b)  $(5x - 3)^2$

c)  $(3x + 7)(3x - 7)$

d)  $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

e)  $(2 - \sqrt{3})^2$

f)  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$

g)  $(99)^2$

h)  $(-3x - \frac{1}{3})^2$

i)  $(\frac{1}{2} - 3x)(3x - \frac{1}{2})$

**Exercice 7** Factorisations (Solution)

Factoriser les expressions suivantes :

a)  $2a + 2b - 2c$

b)  $3x + xy$

c)  $x^2y + y^2x$

d)  $2x + x^2 + 1$

e)  $a^2 + 36 - 12a$

f)  $x^2 - 100$

g)  $9x^2 - 16 + (3x + 4)(3x - 2)$

h)  $(2x + 3)(2x - 1) - 4x^2 - 12x - 9$

i)  $(x + 1)^2 + x^2 - 1$



**Exercice 8 (Solution)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $x + 27,8 = -19,3$

b)  $x + \frac{7}{6} = 521$

c)  $\frac{-4x}{9} = 53$

d)  $4x - 5 + 3 = x - 9 + x - 13$

e)  $(2x - 1) - (2 + x) - 7 = 3 + 7x$

f)  $\frac{x-3}{4} = -\frac{2x}{3} + 2$

g)  $(2x + 4)(3x - 1) = 0$

h)  $(x + 1)(x - 1)(2x - 3) = 0$

i)  $(5x - 2)(x + 7) = -(5x - 2)^2$

**Exercice 9 (Solution)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes. On donnera les solutions à l'aide d'intervalles.

a)  $x + 3 > -5$

b)  $x + 3 \leq 2$

c)  $4x > -8$

d)  $2(x-3) + 3(x-6) + 6(x-4) \leq 0$

e)  $(x+5)^2 + (x+5)(2x+10) < 0$

f)  $\frac{-3x}{2} + 9 \geq 0$

g)  $(2x-4)(x+3) > 0$

h)  $(x+9)(-2x-4)(3x-2) < 0$

i)  $\frac{x-5}{4-x} \geq 0$

**Exercice 10** Equations du second degré (1) (Solution)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes, sans utiliser le discriminant :

a)  $x^2 - 25 = 0$

b)  $3x^2 + 4x = 0$

c)  $x^2 + 7 = 0$

d)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

e)  $9x^2 - 4 = 0$

**Exercice 11** Equations du second degré (2) (Solution)

Dans chacun des cas, résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$  et, si possible, factoriser  $f(x)$ .

a)  $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

b)  $f(x) = x^2 + x + 1$

c)  $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

d)  $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$

e)  $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 9,5$

f)  $f(x) = 5x^2 + 12x + 3$

**Exercice 12** Equations du second degré (3) (Solution)

Dans chacun des cas, résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = g(x)$ .

a)  $f(x) = 3x^2 + 5x$  et  $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$

b)  $f(x) = (2x + 4)^2$  et  $g(x) = 3x + 5$

**Exercice 13** Inéquations du second degré (Solution)

Dans chacun des cas, résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes en faisant un tableau de signes.

a)  $2x^2 - 3x + 4 \geq 0$

b)  $-3x^2 + 30x - 75 < 0$

c)  $7x^2 + 2x - 4 < 0$

d)  $2x^2 - 3x + 4 \geq 5x + 6$

e)  $-x^2 + 8x - 7 > 3x^2 + 1$

**Exercice 14** Proportionnalité (Solution)

1. Compléter les deux tableaux suivants.

|                    |   |   |    |    |   |    |     |     |         |
|--------------------|---|---|----|----|---|----|-----|-----|---------|
| Côté d'un carré    | 1 | 2 |    | 7  | 8 |    | $a$ | $b$ | $a + b$ |
| Périmètre du carré |   |   | 20 | 28 |   | 40 |     |     |         |

|                 |   |   |   |    |   |     |     |     |         |
|-----------------|---|---|---|----|---|-----|-----|-----|---------|
| Côté d'un carré | 1 |   | 5 | 7  | 8 |     | $a$ | $b$ | $a + b$ |
| Aire du carré   |   | 4 |   | 49 |   | 100 |     |     |         |

2. Dire lequel des deux tableaux est un tableau de proportionnalité. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Vérifier qu'il existe aussi un coefficient qui permet de passer de la ligne inférieure à la ligne supérieure dans le tableau de proportionnalité.
3. On considère maintenant que les valeurs des tableaux sont les coordonnées de différents points. Représenter ces points dans un repère orthonormé. Vérifier que dans le cas du tableau de proportionnalité, la courbe obtenue est une droite passant par l'origine. Quelle est la pente de cette droite ?

**Exercice 15** Calculs de débit (Solution)

1. On sauvegarde une banque de films. On constate que l'on parvient à sauvegarder un fichier de 300 Mo en 20s. Combien d'heures met-on à sauvegarder toute la banque qui pèse 500 Go en tout ?
2. On souhaite effectuer une sauvegarde chaque jour. Quelle taille maximum la banque peut-elle peser pour que la sauvegarde puisse se faire en moins de 24 h ?

**Exercice 16** (Solution)

On remplit un coffre-fort de  $1 \text{ m}^3$  de disques durs, chacun contenant 10 To pour des dimensions  $50\text{mm} \times 30 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ .

Combien de stockage cela représente-t-il ?

**Exercice 17** (Solution)

1. Nous souhaitons représenter un projet de bâtiment sur une carte de 1/25000. Quelle est l'allure la représentation graphique de la fonction qui donne les dimensions sur la carte en fonction de la dimension réelle. Tracer le graphe de cette fonction et donner les dimensions sur la carte d'un bâtiment rectangulaire de 30 m sur 50 m.
2. Sur une carte du Mali, la distance en ligne droite entre Bamako et Ségou est de 17,5 cm. En réalité, elle est de 206 km. Quelle est l'échelle de la carte ? Déterminer la fonction qui exprime la dimension réelle en cm en fonction de la dimension sur la carte en km.
3. Pour une carte à l'échelle 1/10000, quelle est l'allure de la fonction qui donne l'aire réelle d'un bâtiment carré en fonction de la longueur du côté sur la carte ?

**Exercice 18** Dilution (Solution)

1. Pour une solution stock d'un antibiotique concentrée à 10 mg/mL compléter le tableau suivant

|                         |      |                  |                  |                 |
|-------------------------|------|------------------|------------------|-----------------|
| Quantité prélevée       | 1 mL | 10 $\mu\text{L}$ |                  |                 |
| Quantité d'antibiotique |      |                  | 10 $\mu\text{g}$ | 1 $\mu\text{g}$ |

Dans les questions qui suivent on part d'une solution stock concentrée à 10 mg/mL.

2. Lorsqu'on ajoute 20  $\mu\text{L}$  de solution stock à 980  $\mu\text{L}$  d'eau, quelle est la concentration de la solution obtenue ?
3. A partir d'une solution stock concentrée à 10 mg/mL on veut faire une solution concentrée à 1 mg/mL. Montrer que le volume  $V_S$  (exprimé en mL) de solution stock à ajouter à 1 mL d'eau est solution de  $10x = x + 1$  puis calculer  $V_S$ .
4. On appelle *facteur de dilution* le rapport  $\frac{V_S}{V_f}$  où  $V_S$  est le volume de la solution stock et  $V_f$  le volume de la solution obtenue après ajout d'eau (dilution). Montrer que :

$$\frac{V_S}{V_f} = \frac{C_f}{C_S}$$

où  $C_S$  et  $C_f$  sont les concentrations des solutions stock et finale.

5. Le facteur de dilution est  $10^{-4}$  et on souhaite obtenir 10 mL de solution finale, calculer le volume  $V_S$  à prélever et le volume  $V_d$  d'eau à ajouter.

# Chapitre 2

## Géométrie Plane

### Exercice 19 Vecteurs (Solution)

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées  $(4, -2)$  et  $(-3, 3)$ .

1. Donner les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  puis le représenter.
2. Représenter le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(-5, 2)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 20 Vecteurs (2) (Solution)

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées  $(1, -2)$ ,  $(4, -2)$  et  $(-1, 1)$ . Trouver les coordonnées d'un point  $D$  tel que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  soient colinéaires.

### Exercice 21 Equation cartésienne (Solution)

Donner une équation cartésienne pour la droite passant par les points  $(4, -2)$  et  $(-3, -3)$ .

### Exercice 22 Vecteur directeur (Solution)

Soit  $d$  la droite d'équation cartésienne  $4y - x + 10 = 0$ . Déterminer un vecteur directeur de  $d$ .

### Exercice 23 Droites (Solution)

1. Compléter le tableau ci-dessous
2. Justifier que  $(D_1)$  et  $(D_3)$  ne sont pas parallèles.
3. Tracer  $(D_1)$  et  $(D_3)$  dans un repère orthonormé.
4. Déterminer le point d'intersection de  $(D_1)$  et  $(D_3)$ .

### Exercice 24 (Solution)

On considère un repère orthonormé du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Parmi les triplets suivants, dire lesquels forment un repère et préciser s'il est orthonormé.

$$(O, \vec{i}, \vec{j}), \quad (O, \vec{i}, -\vec{j}), \quad (O, \vec{j}, -\vec{i}), \quad (O, \vec{i}, \vec{i} + \vec{j}).$$

2. Soient  $A$  de coordonnées  $(1, 1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $B$  de coordonnées  $(0, 1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{i} + \vec{j})$  et  $C$  de coordonnées  $(-1, -1)$  dans le repère  $(O, -\vec{i}, -\vec{j})$ . Que peut-on dire des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ?

### Exercice 25 (Solution)

Dans un repère du plan, on considère les points  $E(-7, 6)$ ,  $F(3, 3)$ ,  $G(-8, 1)$  et  $H(4, -5)$ .

1. Les droites  $(EF)$  et  $(GH)$  sont-elles parallèles ?
2. Soit  $L(x, -5)$  avec  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $x$  pour que  $(EF)$  et  $(GL)$  soient parallèles.

### Exercice 26 (Solution)

Dans un repère du plan, on considère les points  $A(-2, 3)$ ,  $B(3, -1)$  et  $C(4, 4)$ .

1. Calculer les coordonnées de  $K$  tel que  $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ .
2. Calculer les coordonnées de  $L$  tel que  $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ .

3. Calculer les coordonnées de  $M$  tel que  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ .
4. Démontrer que  $K$ ,  $L$  et  $M$  sont alignés.

**Exercice 27** (Solution)

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points  $A(2, 2)$ ,  $B(-3, 6)$  et  $C(10, -3)$ .

1. Déterminer les coordonnées de  $D$  pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
2. Calculer  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ . Que peut-on en déduire pour le triangle  $ABC$  ?
3. Calculer les coordonnées du milieu  $I$  de  $[BC]$
4. Calculer les coordonnées de  $J$  tel que  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IA}$ .
5. Démontrer que  $A$  est le milieu de  $[IJ]$ .
6. Calculer les coordonnées de  $K$  tel que  $2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$ .
7. Démontrer que  $D$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice 28** (Solution)

Dans un repère du plan, on considère les points  $A(-1, 2)$ ,  $B(5, -4)$  et le vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

1. Tracer la droite  $d$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .
2. Le point  $B$  appartient-il à  $d$  ?

**Exercice 29** (Solution)

On considère la droite  $d$  d'équation cartésienne  $3y + 2x - 4 = 0$ .

1. Donner la forme réduite de l'équation de  $d$ .
2. Déterminer un vecteur directeur de  $d$  à coordonnées entières.

**Exercice 30** (Solution)

Quel est le coefficient directeur d'une droite de vecteur directeur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ?

**Exercice 31** (Solution)

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

1.  $A(-3, 2)$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
2.  $A(-2, 2)$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$ .
3.  $A(0, -4)$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 28 \\ 35 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 32** (Solution)

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A$  et parallèle à  $d$ .

1.  $A(2, -3)$  et  $d : 2x - y + 2 = 0$ .
2.  $A(0, -3)$  et  $d : -3x + 4y - 5 = 0$ .

**Exercice 33** (Solution)

Dans un repère du plan, on considère les points  $A(-2, 4)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(-5, 0)$  et  $D$  tel que  $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ .

1. Placer les points  $A, B, C$  et  $D$ .
2. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?
3. Déterminer les coordonnées de  $D$ .
4. On considère la droite  $d$  d'équation  $6x + y - 14 = 0$ . Vérifier que  $B$  et  $D$  appartiennent à  $d$ .
5. Déterminer une équation cartésienne de  $(AC)$
6. Démontrer que  $(BD)$  et  $(AC)$  sont sécantes en un point  $E$  dont on déterminera les coordonnées.
7. Calculer les coordonnées de  $K$  milieu de  $[AB]$  et de  $L$ , milieu de  $[CD]$ .
8. Démontrer que  $E, K$  et  $L$  sont alignés.

**Exercice 34** Coordonnées-produit scalaire (Solution)

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés dans le plan. Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ , défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (1)$$

1. En utilisant la relation de CHASLES montrer que  $G$  vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

2. On se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Déterminer les coordonnées de  $G$  pour  $A(0, 3)$ ,  $B(2, 2)$  et  $C(1, 1)$ .
3. Faire une représentation graphique et vérifier géométriquement la relation 1.

**Exercice 35** (Solution)

On considère un repère orthonormal du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et un triangle de sommets :

$$A(1, 1), \quad B(2, 3), \quad C(3, 0).$$

Pour  $t \geq 0$  on considère les points :

$$A_t(1 + 2t, 1 + 6t), \quad B_t(2 + 2t, 3 + 6t), \quad C_t(3 + 2t, 6t).$$

1. Décrire l'opération géométrique qui transforme le triangle  $(ABC)$  en le triangle  $(A_t, B_t, C_t)$ .
2. Quels sont les coordonnées de  $A_t$ ,  $B_t$  et  $C_t$  dans le repère  $(O_t, \vec{i}, \vec{j})$  où  $O_t$  est le point de coordonnées  $(2t, 6t)$  dans  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .



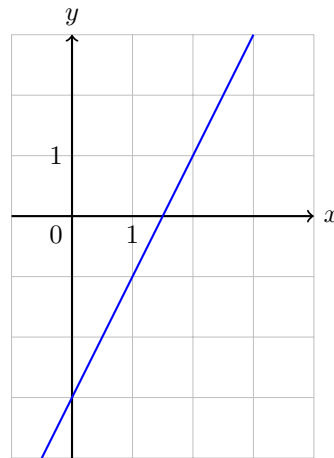
# Chapitre 3

## Notions de fonctions

### Exercice 36 Fonction affine (Solution)

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 3$ , dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de 2 par  $f$ .
2. Retrouver ce résultat par le calcul.
3. Déterminer graphiquement l'antécédent par  $f$  de  $-0.5$ .
4. Retrouver ce résultat par le calcul.



### Exercice 37 Parabole (Solution)

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

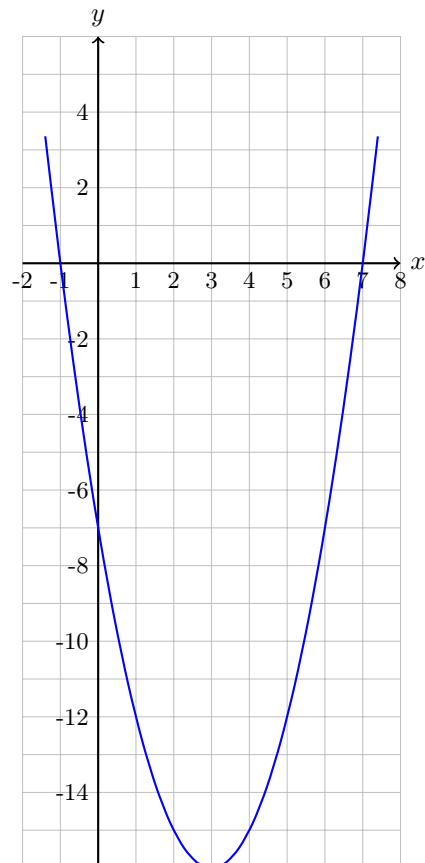
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 6x - 7,$$

dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de 5 par  $f$ .
2. Retrouver ce résultat par le calcul.
3. Déterminer graphiquement l'antécédent par  $f$  de 0.
4. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = (x - 3)^2 - 16.$$

5. Retrouver les antécédents par  $f$  de 0, par le calcul.
6. Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
7. Déterminer le tableau de signes de la fonction  $f$ .
8. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = -7$ .
9. Résoudre cette équation par le calcul.



### Exercice 38 Fonctions paires - impaires - périodiques (Solution)

Tracer la représentation graphique de  $\tilde{f}$ , prolongement à  $[-1; 1]$  de la fonction :

$$f : [0 : 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Si  $\tilde{f}$  est paire.
2. Si  $\tilde{f}$  est impaire.

**Exercice 39** Fonctions paires et impaires (Solution)

Déterminer lesquelles des fonctions suivantes sont paires, lesquelles sont impaires et lesquelles sont ni paires, ni impaires :

a)  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{|x|}$

b)  $f(x) = x(7 - x^2)$

c)  $f(x) = x^3 - x^2$

d)  $f(x) = \frac{x^3}{2 - x^2}$

e)  $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^3}$

f)  $f(x) = \frac{1 + x^3}{1 - x^3}$

**Exercice 40** Limites et fonctions usuelles (Solution)

Dans chaque cas, donner un exemple de fonction satisfaisant :

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Exercice 41** Démarches pour recherche une limite (1) (Solution)

Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 5)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1024x + 4)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x + 5}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x - 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

h)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x^2 - 1}$

i)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x + 1}{x + 2}$

j)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 1}$

k)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$

l)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{x^3 + 1}{|5 - x|}$

m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

n)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

**Exercice 42** Démarches pour recherche une limite (2) (Solution)

Dans chacun des cas, déterminer la limite de  $f$  en  $a$  :



$$a) \quad f(x) = \frac{5x^2 + 3}{x^3 - 2x^2} \quad \text{en } a = -\infty$$

$$b) \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^3 - 2x^2} \quad \text{en } a = 0$$

$$c) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{en } a = -\infty$$

$$d) \quad f(x) = x + 2 \sin(x) \quad \text{en } a = +\infty$$

$$e) \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{x + 2 \sin(x)} \quad \text{en } a = +\infty$$

**Exercice 43** Limites et interprétation graphique (Solution)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ .
  - Que peut-on en déduire pour  $f$  ? On pourra s'aider d'une représentation graphique approximative de  $\mathcal{C}$  lorsque  $x$  est proche de  $-1$ .
- Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 1$ . On pose pour tout réel  $x > -1$ :

$$d(x) = f(x) - (x + 1).$$

- Déterminer la limite de  $d$  en  $+\infty$ .
- Que peut-on en déduire pour les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ? On pourra s'aider d'une représentation graphique approximative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  lorsque  $x$  devient grand.
- Etudier le signe de  $d$  sur  $] -1; +\infty[$ . Que peut-on en déduire quant à la position des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ?

**Exercice 44** Continuité-Théorème des valeurs intermédiaires (Solution)

Une personne parcourt en véli 40 km en 2 heures, on veut montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel elle parcourt 20 km.

On note  $d(t)$  la distance parcourue en km en fonction du temps  $t$  écoulé, depuis son départ, exprimé en heures. On peut supposer que  $d$  est continue sur  $[0; 2]$ .

- Que valent  $d(0)$  et  $d(2)$  ?
- Exprimer à l'aide de la fonction  $d$  la distance parcourue au bout de 20 minutes, au bout de 1h20 mn et enfin durant 1h après avoir roulé durant 20 mn.
- On définit que  $[0; 1]$  la fonction  $f$  par  $f(t) = d(t + 1) - d(t)$ . Traduire à l'aide de  $f$  le problème initial.
- Calculer  $f(0) + f(1)$  puis justifier que  $f(0)$  et  $f(1)$  ne peuvent être simultanément strictement inférieurs à 20 (respectivement simultanément strictement supérieurs à 20).
- Conclure.



# Chapitre 4

## Dérivée d'une fonction

### Exercice 45 Allure d'une courbe (Solution)

On considère le tableau suivant :

|         |    |    |     |     |    |
|---------|----|----|-----|-----|----|
| $a$     | -4 | -2 | 0   | 2   | 6  |
| $f(a)$  | 2  | -1 | 3,5 | 5   | 5  |
| $f'(a)$ | -1 | 0  | 1   | 0,5 | -1 |

1. Dans un repère orthonormé, placer les points de la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  donnés par le tableau.
2. Tracer les tangentes à  $\mathcal{C}$  en ces points.
3. Tracer une allure possible de la courbe  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 46 Taux de variations (1) (Solution)

Un véhicule décrit un mouvement rectiligne. La distance parcourue, en mètres, entre le temps 0 et le temps  $t$  est  $d(t) = t^2 + 5t$ .

1. Calculer pour  $h > 0$  :

$$\frac{d(h) - d(0)}{h}.$$

2. Déterminer la vitesse instantanée  $d'(0)$  de ce véhicule au temps  $t = 0$ .
3. Déterminer sa vitesse instantanée à  $t = 10$ s.

### Exercice 47 Taux de variations (2) (Solution)

On considère la fonction racine carrée  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$ .

1. Vérifier que pour  $h > -1$  :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}.$$

2. En déduire l'existence et la valeur de  $f'(1)$ .

### Exercice 48 Calculs de dérivée (Solution)

Dans chaque cas dire sur quel domaine  $f$  est dérivable puis calculer  $f'(x)$ .

a)  $f : x \mapsto 2x + 1$

b)  $f : x \mapsto -4x^2 + \sqrt{2}x$

c)  $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 4x$

d)  $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

e)  $f : x \mapsto x^7(3x^3 + 5x^2 + 2x + 1)$

f)  $f : x \mapsto x^3(x - \sqrt{x})$

g)  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

h)  $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$

i)  $f : x \mapsto \frac{2\sqrt{x+1}}{x^2 + 1}$

### Exercice 49 Vitesse et dérivée (Solution)

Trouver la vitesse instantanée à l'instant  $t_0$  d'un point matériel qui se déplace selon  $x(t)$  ( $x$  est en mètres,  $t$  est en secondes).

- a)  $x(t) = v_0 t + x_0$                       b)  $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$                       c)  $x(t) = at - b$
- d)  $x(t) = -at + b$                       e)  $x(t) = -2t^2 + 5t, t_0 = 1 \text{ s}$                       f)  $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 6t, t_0 = 2 \text{ s}$
- g)  $x(t) = 5t^3 + 2, t_0 = 4 \text{ s}$

**Exercice 50** Vitesse et accélération ([Solution](#))

La vitesse d'un point matériel qui se déplace de façon rectiligne varie selon la loi  $v(t) = 2t^3 - 3t$  ( $v$  s'exprime en mètres par seconde,  $t$  est en secondes). A quel instant du temps entre  $t = 5 \text{ s}$  et  $t = 10 \text{ s}$  l'accélération sera-t-elle maximale ?

Rappel : l'accélération à l'instant  $t$  est  $a(t) = v'(t)$ .



Contexte : Charge hydraulique

Pour un écoulement de vitesse  $v$ , à une altitude  $z$  et une pression  $p$ , on définit la charge hydraulique :

$$B(v, p, z) = \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}$$

- On se place dans le cas particulier où  $B(v, p, z)$  est constant. Que peut-on en déduire sur la différentielle de  $B$  ?
- Dans le cas particulier où l'on considère un écoulement à altitude constante, montrer que :

$$\frac{dp}{dv} = -\rho v.$$

**Exercice 51** Le problème de mathématiques ([Solution](#))

Lorsque l'altitude,  $z$ , est constante, justifier que la pression  $p$  est une fonction de la vitesse  $v$  puis montrer que  $p'(v)$  est proportionnelle à  $v$ .

# Chapitre 5

## Etude de fonctions

### Exercice 52 (Solution)

Soit les trois fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  :

- $f_1 : x \mapsto -3x^2 + 6x$
- $f_2 : x \mapsto |-3x^2 + 6x|$
- $f_3 : x \mapsto -3x^2 + 6|x|$

1. Etudier les variations de  $f_1$  et donner sa représentation graphique.
2. En déduire les variations de  $f_2$  et  $f_3$ .
3. Donner la représentation graphique de  $f_2$  et  $f_3$  à l'aide de celle de  $f_1$  et construire les représentations graphiques des fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

### Exercice 53 (Solution)

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 8x + \frac{57800}{x}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- (a) Calculer  $f'(x)$ .
  - (b) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
  - (c) Déterminer la position relative de la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 8x$  et de  $\mathcal{C}$ .
  - (d) Construire  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ .
2. Le manager du groupe de musique AVATAR doit organiser le transport des instruments de musique du groupe sur une petite tournée européenne de 3400km à l'aide d'un camion poids lourd. La consommation en gazole en litres par heure du camion est donnée par la formule  $\left(\frac{5}{2} + \frac{v^2}{595}\right)$  où  $v$  représente la vitesse du camion en km/h. Le prix du litre de gazole est de 1,4 euros et le chauffeur est rémunéré 13.5 euros de l'heure.
  3. (a) Montrer que le coût du transport en euros est égal à  $f(v)$ .  
(b) A quelle vitesse doit rouler le camion pour que le coût de transport soit minimal ? Quel est ce coût ?  
(c) Le manager dispose d'au plus 1556 euros pour le transport. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse du camion pour tenir compte de cette nouvelle contrainte. On n'oubliera pas que ce type de camion ne peut pas se déplacer à une vitesse supérieure à 90 km/h



Contexte : Loi des gaz parfaits  
La loi des gaz parfaits est :

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \text{ où } M \text{ est la masse molaire.}$$

On introduit peu à peu un gaz connu dans un ballon, à température  $T$  constante et volume  $V$  constant. On mesure la masse  $m$  et la pression  $P$  à chaque ajout successif. Que tracer pour vérifier la loi des gaz parfaits et mesurer  $R$  ?

**Exercice 54** Le problème de mathématiques ([Solution](#))

Si on a la relation  $PV = \frac{m}{M}RT$  avec  $V, M, R$  et  $T$  des constantes, quelle est la nature de la fonction  $m \mapsto \frac{m}{MV}RT$  ? Quelle est sa représentation graphique et éléments caractéristiques ? Donner un moyen pour déterminer  $R$  à partir de la représentation graphique pour  $V, M, T$  connues.

**Exercice 55** Etude d'une fonction (1) ([Solution](#))

1. Pour  $x \geq 0$ , on considère la fonction  $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ . Etudier les variations de cette fonction.
2. Calculer la valeur maximale de  $f$ .
3. Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de la forme d'un parallélépipède rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit  $l \times h^2$ , où  $l = AB$  et  $h = BC$  (voir la figure ci-dessous). On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre, c'est-à-dire que ce rayon est de 1 unité.

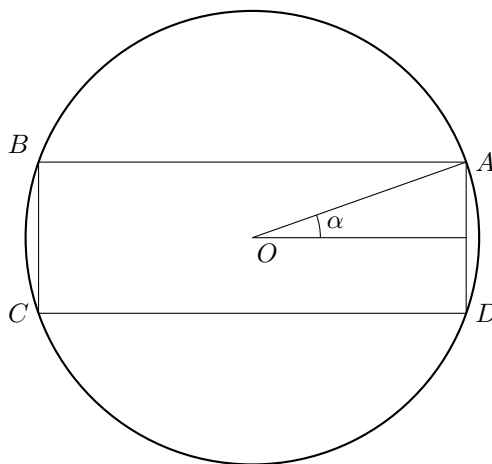
(a) Montrer que  $h^2 = 4 - l^2$ .

(b) En déduire que :

$$l \times h^2 = -l^3 + 4l = f(l)$$

(c) Comment choisir  $h$  et  $l$  pour que la poutre résiste au mieux la flexion ?

(d) Quel est l'angle  $\alpha$  correspondant à  $0,1^\circ$  près ?

**Exercice 56** Etude d'une fonction (2) ([Solution](#))

1. On considère la fonction  $f(x) = x\sqrt{1-x}$ . Donner son domaine de définition et de dérivabilité.
2. Calculer  $f'(x)$  puis étudier les variations de  $f$ .
3. Déterminer son maximum et la valeur pour laquelle il est atteint.
4. Avec un disque de rayon  $R$ , on souhaite confectionner un cône de révolution ouvert (sans la base). Pour cela, on enlève un secteur angulaire du disque, puis on colle l'un à l'autre côtés du secteur angulaire enlevé. La base du cône a pour rayon  $r$ . Faire un schéma.
5. Justifier que  $r < R$  et que la hauteur du cône obtenu est  $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ .
6. Montrer que le volume du cône est :

$$V(r) = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{\pi R^3}{3}f\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right).$$

7. En déduire la valeur du rapport  $\frac{r}{R}$  pour lequel le volume du cône soit maximal.

**Exercice 57** Moyenne arithmétique - moyenne géométrique (Solution)

1. Justifier que  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$  lorsque  $x$  est proche de 0.
2. Soit  $a$  un réel strictement positif. Dédurre de la question 1 que  $\sqrt{a(a+\varepsilon)} \approx a + \frac{\varepsilon}{2}$  lorsque  $\varepsilon$  est proche de 0 et que  $\sqrt{ab} \approx \frac{a+b}{2}$  lorsque  $b$  est proche de  $a$ .

**Exercice 58** Etude d'une fonction (3) (Solution)

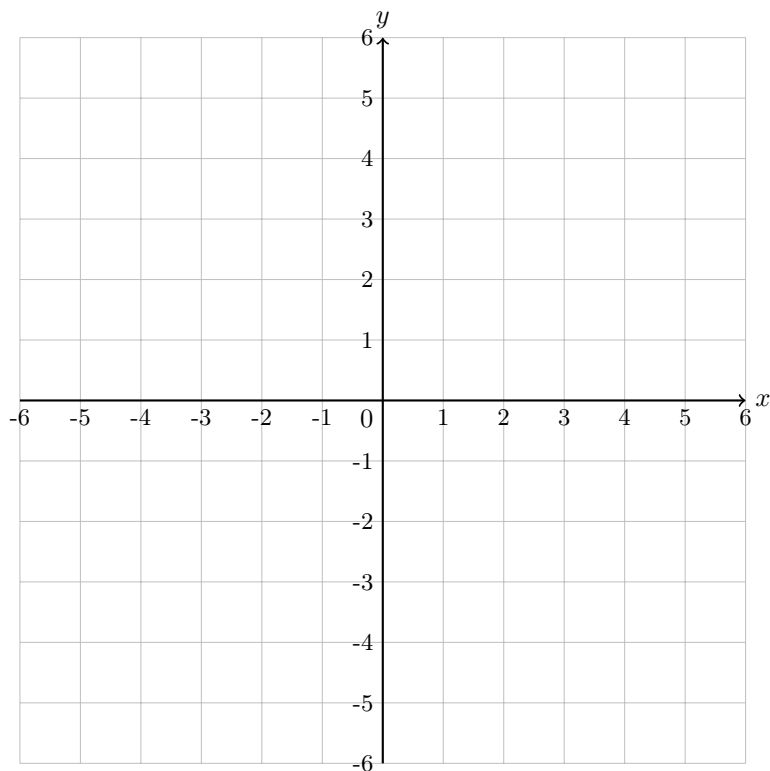
On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{9}{x^2 - 4}$$

1. Quel est le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  ?
2. Montrer que  $f$  est paire.
3. Donner le signe de  $x^2 - 4$  selon les valeurs de  $x$ .
4. Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

5. Déterminer  $f'$  et  $\mathcal{D}_{f'}$ .
6. Dresser le tableau de variation de  $f$  en vous limitant à  $\mathbb{R}^+$ .
7. Calculer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
8. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Déterminer l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point  $(1, f(1))$ .
9. Sur le graphique ci-dessous, tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$  et la tangente  $\mathcal{T}$ .







# Chapitre 6

## Fonctions circulaires

**Exercice 59** Mesure principale ([Solution](#))

1. Calculer la mesure principale des angles dont une mesure est donnée ci-dessous.

$$a) \frac{53\pi}{6} \quad b) \frac{35\pi}{6}$$

2. Placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique.
3. Déterminer la valeur exacte des cosinus suivants :

$$a) \cos\left(\frac{53\pi}{6}\right) \quad b) \cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)$$

**Exercice 60** Relation entre sinus et cosinus ([Solution](#))

1. Soit  $x$  un élément de l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  tel que  $\cos(x) = \frac{1}{4}$ . Déterminer  $\sin(x)$ .
2. Soit  $x$  un élément de l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  tel que  $\sin(x) = \frac{1}{3}$ . Déterminer  $\cos(x)$ .

**Exercice 61** Equations et fonctions circulaires ([Solution](#))

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle unité.

$$a) \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$c) \sin(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d) 2\sin(x) + 1 = 0$$

$$e) 2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$$

$$f) \cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$g) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h) 4\cos^2(x) - 1 = 0$$

$$i) 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

**Exercice 62** Simplifications ([Solution](#))

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = 2\sin(x) + \cos(x + \pi) + \cos(x) + \sin(-x)$$

$$B = \sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) - 2\sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x + \pi)$$

2. Sans utiliser de calculatrice, calculer la somme :

$$S = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

**Exercice 63** Formules trigonométriques ([Solution](#))

- Développer les expressions suivantes :

$$a) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad b) \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

- Soit  $A = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ . Exprimer  $A$  sous chacune des deux formes suivantes :

$$a) A = r \cos(x - \alpha) \quad b) r \sin(x + \beta)$$

où  $r > 0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels à déterminer.

*Indication* Pour le a), trouver  $r$  et  $\alpha$  tels que  $r \cos(\alpha) = 1$  et  $r \sin(\alpha) = \sqrt{3}$ .

**Exercice 64** Encore des équations avec fonctions circulaires (Solution)

Soit l'équation  $(E) : \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ .

- Vérifier que l'équation  $(E)$  est équivalente à l'équation :

$$\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = \frac{1}{2}$$

- En déduire qu'elle est équivalente à l'équation

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E)$ .

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}.$$

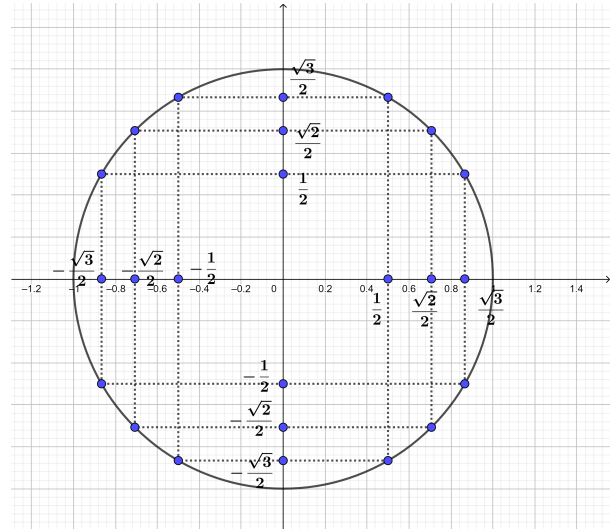
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos(x) + \sin(x) = 1.$$

**Exercice 65** Inéquations et fonctions circulaires (Solution)

En vous appuyant sur le cercle trigonométrique ci dessous, résoudre graphiquement les inéquations suivantes sur  $I = [0, 2\pi[$  puis sur  $J = ]-\pi, \pi]$ .

- $2 \sin(x) + \sqrt{2} < 0$ .
- $2 \sin(x) + 1 \geq 0$ .
- $2 \cos(x) + \sqrt{3} \leq 0$ .
- $\sqrt{2} \cos(x) > 1$ .



**Exercice 66** Fonctions circulaires et périodicités (Solution)

Démontrer que les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ci-dessous sont périodiques et trouver une période positive.

- |                                       |                                   |
|---------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \sin(2x)$                  | b) $f(x) = 3 - \sin^2(x)$         |
| c) $2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ | d) $f(x) = \tan(2x)$              |
| e) $f(x) = \sin(x) \cos(x)$           | f) $f(x) = \sin^4(x) - \cos^4(x)$ |

**Exercice 67** Etude d'une fonction avec des fonctions circulaires (Solution)

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est paire et déterminer sa période positive.
3. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  et déterminer son signe sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$  et tracer l'allure de la courbe sur  $[-\pi, 3\pi]$ .

**Exercice 68** Période (Solution)

Soit  $f$  la fonction de  $[0, 2\pi]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \cos(4x)$ . Montrer que  $f$  est périodique et déterminer sa plus petite période.



# Chapitre 7

## Produit scalaire

### Exercice 69 (Solution)

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Etudier la colinéarité et l'orthogonalité entre ces vecteurs.

### Exercice 70 (Solution)

On considère un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit les cinq droites :

$$d_1 : 6x + 9y + 18 = 0$$

$$d_2 : 4x + 6y - 5 = 0$$

$$d_3 : 5x - y + 15 = 0$$

$$d_4 : \frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$$

$$d_5 : x + 5y = 0$$

1. Donner des vecteurs directeurs et des vecteurs (*i.e.* orthogonaux) à chacune de ces droites.
2. Lesquelles de ces droites sont parallèles entre elles ?
3. Lesquelles de ces droites sont perpendiculaires entre elles ?
4. Lesquelles de ces droites sont confondues ?
5. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point  $A(-2, 5)$  sur chaque droite. *Rappel: Lorsque  $A$  n'est pas sur une droite  $d$ , le projeté orthogonal de  $A$  sur  $d$  est le point  $H$  de la droite  $d$  tel que  $(AH) \perp d$ .*

### Exercice 71 (Solution)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $\mathcal{R}$ , soit le vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et les points  $A(1, 1)$  et  $B(2, 1)$ .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite par  $A$  et dont  $\vec{u}$  est un vecteur normal.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite par  $B$  et dont  $\vec{u}$  est un vecteur normal.

### Exercice 72 Calcul d'angle (Solution)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , soit les points  $A(-2, -1)$ ,  $B(0, -2)$  et  $C(1, 1)$ . Nous allons calculer l'angle  $\widehat{BAC}$ .

1. Dessiner le triangle  $ABC$  sur une figure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  puis calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
3. Exprimer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  en fonction de  $\cos(\widehat{BAC})$ .
4. En déduire la valeur exacte de  $\cos(\widehat{BAC})$  puis une valeur approchée de la mesure principale de  $\widehat{BAC}$  (on mesure l'angle dans le même sens que pour aller au plus court de  $\vec{i}$  à  $\vec{j}$  : la mesure recherchée appartient à  $[0, \pi]$ ).

**Exercice 73** Calcul d'angle (2) (Solution)

Reprendre l'exercice précédent avec les points  $A(1, -1)$ ,  $B(2, 2)$  et  $C(-1, 1)$ .

**Exercice 74** Calcul d'angle (3) (Solution)

Dans un plan, soit  $ABC$  un triangle qui vérifie les propriétés suivantes.

- $AB = 5$ ,  $BC = 4$ ,  $AC = 7$ .
- La mesure principale de l'angle  $\widehat{BAC}$  appartient à  $[0, \pi]$ .

1. Faire une figure.

2. Calculer la valeur exacte de  $\cos(\widehat{BAC})$ , puis une valeur approchée de la mesure principale de  $\widehat{BAC}$ . *Rappel : Soit  $\alpha = \widehat{BAC}$  et soit les longueurs  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , alors :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$

**Exercice 75** Calcul d'angle (4) (Solution)

Reprendre l'exercice précédent avec les conditions suivantes :

- $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 6$ .
- La mesure principale de l'angle  $\widehat{BAC}$  appartient à  $[0, \pi]$ .

**Exercice 76** Le problème de mathématiques (Solution)

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de même norme  $a = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ . On note  $\alpha \in [0, \pi]$  l'angle entre ces deux vecteurs.

*Commentaire- Pour chacun des isomères, le vecteur  $\vec{u}$  représente la liaison  $C - \text{COOH}$  en haut à gauche et le vecteur  $\vec{v}$  la liaison en haut à droite ( $C - \text{COOH}$  pour l'acide maléique,  $C - H$  pour l'acide fumarique). Le moment dipolaire est égal à la norme  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ .*

- Exprimer  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$  en fonction de  $a$  et  $\alpha$  en utilisant les deux méthodes ci-dessous :
  - Choisir un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de sorte que  $\vec{u} + \vec{v}$  soit colinéaire à  $\vec{i}$  et effectuer le calcul à partir des composantes des vecteurs.
  - Utiliser le produit scalaire.
- Les deux expressions obtenues sont différentes. En déduire une relation entre  $\cos(\alpha)$  et  $\cos(\frac{\alpha}{2})$ .
- Application numérique : calculer le moment dipolaire pour  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$  pour  $\alpha = 180 - \beta$  avec  $\beta = 120^\circ$ .

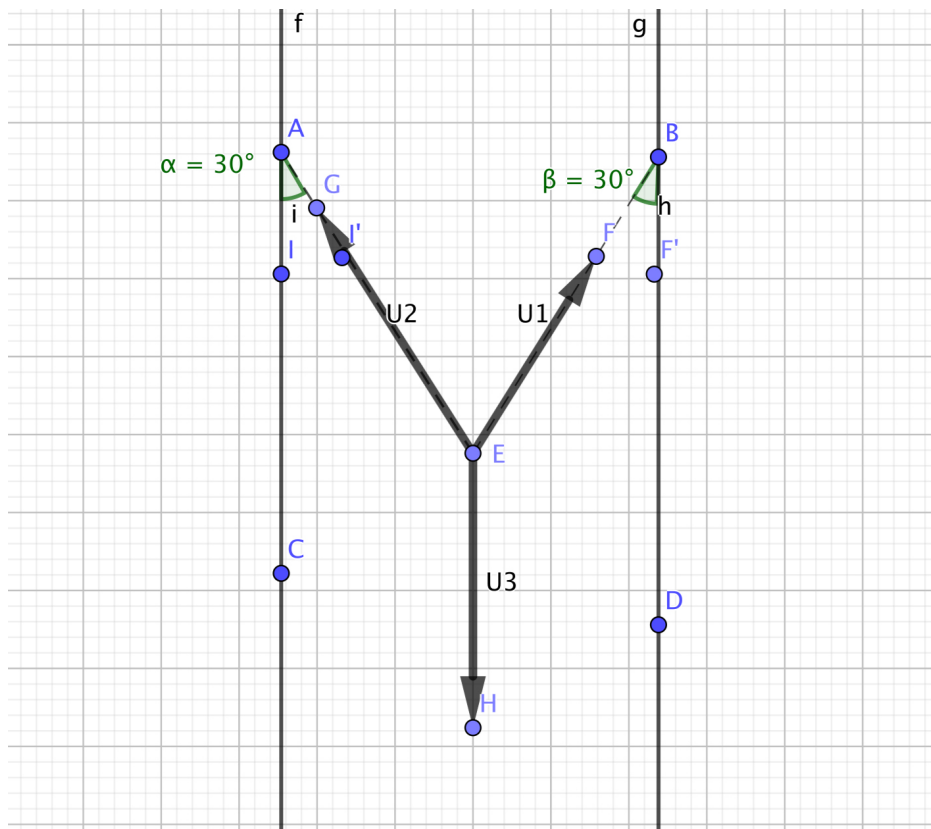
**Exercice 77** (Solution)

On considère dans un repère orthonormal du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et les trois points

$$A(3, 1), \quad B(-2, -1), \quad C(s, 3), \quad s \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $A, B$  et  $C$  sont alignés.
- Déterminer les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $ABC$  est un triangle rectangle.
- Déterminer les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $ABC$  est un triangle isocèle.
- Déterminer les valeurs de  $s$  pour lesquelles  $ABC$  est un triangle équilatéral.
- Déterminer les coordonnées, en fonction de  $s$ , des points  $D$  pour lesquels  $ABCD$  est un parallélogramme.
- Calculer, en fonction de  $s$ , l'aire du triangle  $ABC$ .

**Exercice 78** (Solution)



On considère la figure ci-dessus représentant les force auxquelles un objet situé en  $E$  est soumis (par exemple une enseigne  $E$ , tenue par des ficelles attachées en deux points  $A$  et  $B$  est soumise à la gravitation).

Les droites  $(AC')$  et  $(BD)$  sont parallèles. La direction de  $\vec{U}_3$  est parallèle à  $(AC)$ . Les directions de  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  font un angle de  $30^\circ$  avec  $(BD)$  et  $(AC)$  respectivement. Le triangle  $EAB$  est isocèle en  $E$ .

Déterminer les vecteurs  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  sachant que :

$$\vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 = \vec{0}, \quad \|\vec{U}_3\| = 50.$$



Contexte : Charge hydraulique

On considère la distribution de charge décrite sur la figure ci-dessous : 4 charges ponctuelles sont réparties aux 4 coins d'un carré de côté  $L$ . On pose  $Q > 0$ . Les deux charges sont équivalentes, les deux charges  $-2Q$  également, on les numérote pour les distinguer.

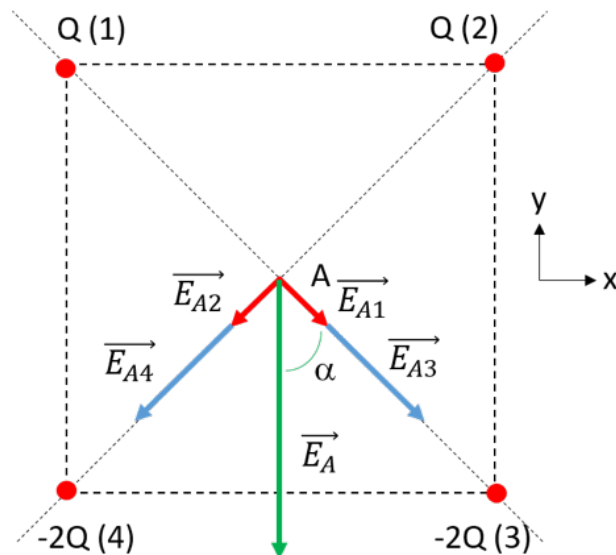
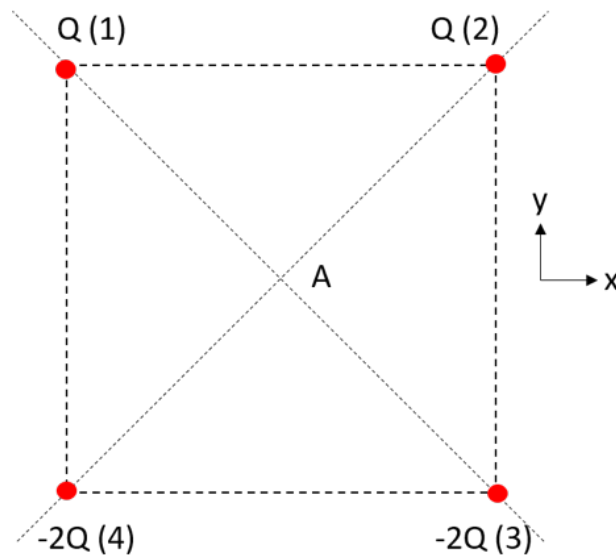
On rappelle qu'une charge ponctuelle  $q$  crée en un point  $M$  distant de  $r$  un champ électrostatique défini tel que :

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé de la charge vers le point  $M$  et  $k$  une constante. Il en découle que :

- Le champ  $\vec{E}$  est dans la même direction et le même sens que  $\vec{u}$  si la charge est positive ;
- le champ  $\vec{E}$  est dans la même direction mais de sens contraire si la charge est négative.

Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}_A$  au centre du carré  $A$ .





**Exercice 79** Le problème de mathématiques (Solution)

On considère les vecteurs  $\vec{E}_{A_j}$ ,  $j = 1 \dots 4$  portés par les diagonales d'un carré selon le schéma ci-dessus et satisfaisant

$$\|vE_{A_4}\| = \|\vec{E}_{A_3}\| = 2\|\vec{E}_{A_2}\| = 2\|\vec{E}_{A_1}\| = 2e,$$

avec  $e > 0$ .

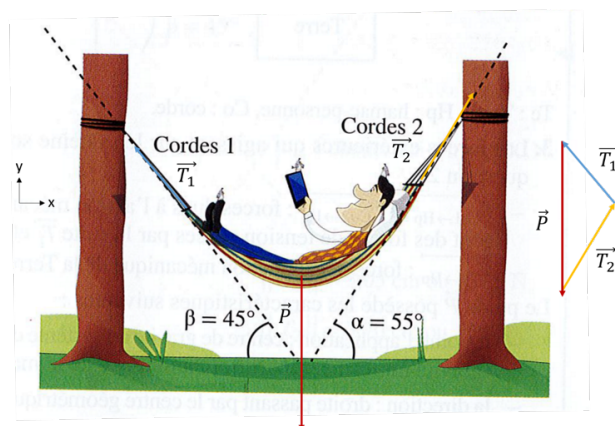
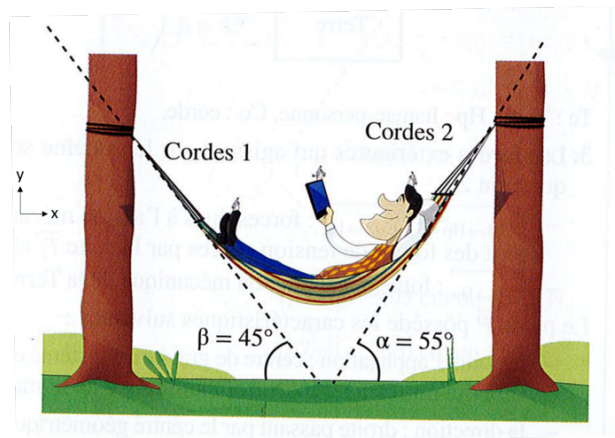
Déterminer, en fonction de  $e$ , les composantes de  $\vec{E}_A = \sum_{j=1}^4 \vec{E}_{A_j}$  dans le repère présenté sur le schéma.



Contexte : Charge hydraulique

On considère une personne allongée dans un hamac, lui-même accroché entre deux arbres. La masse de la personne est  $M = 80$  kg, et on suppose que la masse du hamac et des cordes est négligeable devant la masse de la personne. On donne  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et on fait l'hypothèse que la masse de la personne est répartie de manière homogène.

1. Faire le bilan des forces extérieures s'exerçant sur le système "personne + hamac". Les représenter sur la figure. On supposera qu'elles sont toutes dans le plan défini par les deux axes.
2. Déterminer dans le repère indiqué les coordonnées de ces forces en les exprimant en fonction des données fournies.
3. Appliquer la première condition d'équilibre statique pour déterminer la norme des forces extérieures s'exerçant sur le système "personne + hamac".

**Exercice 80** Le problème de mathématiques (Solution)

On considère les vecteurs  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  dont les directions sont données par le schéma (et le repère ci-dessus) et tels

que

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix},$$

avec  $M = 80$ ,  $g = 9.81$ . Déterminer  $\|\vec{T}_1\|$  et  $\|\vec{T}_2\|$  pour que la relation suivante soit satisfaite :

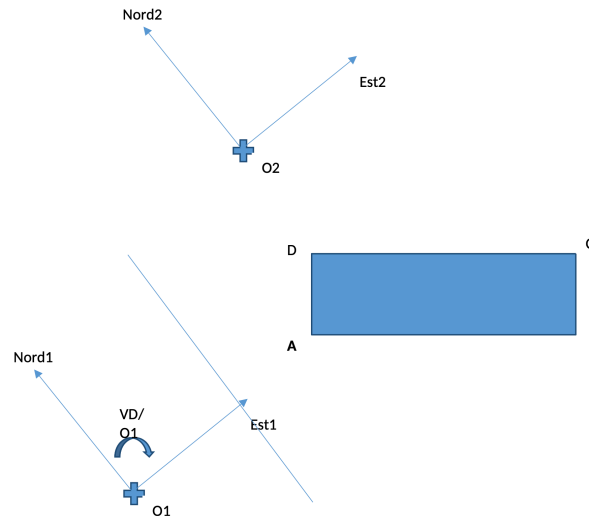
$$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}.$$



Contexte : Charge hydraulique

Nous souhaitons mesurer la longueur  $[AB]$  d'un bâtiment à l'aide d'un niveau optique. Pour cela nous déployons le niveau optique au niveau de la station  $O_1$  et calons l'axe des gisements avec la direction Nord1/  
Les mesures avec le niveau optique nous permettent d'avoir (voir le schéma) :

- Les distances  $O_1A$  et  $O_1B$ ;
- Les gisements  $V_{A/O_1}$  et  $V_{B/O_1}$  qui représentent respectivement les angles en tournant dans le sens d'une aiguille d'une montre entre l'axe de repère des gisements Nord1 et les droites  $(O_1A)$  et  $(O_1B)$ .



### Exercice 81 Le problème de mathématiques (Solution)

Dans le triangle  $O_1AB$ , on connaît les longueurs  $O_1A$  et  $O_1B$  ainsi que l'angle au sommet  $O_1$ , noté  $\alpha$ . Calculer la longueur  $AB$ .



Contexte

Pour réaliser le plan d'occupation au sol d'un bâtiment, nous disposons des levés qui ont été réalisés avec un niveau optique. Les mesures ont été faites à partir de deux stations  $O_1$  et  $O_2$ . Nous avons réalisé un transfert de gisement entre les deux stations de telle sorte que les axes Nord1 et Nord2 sont parallèles. Nous disposons des valeurs suivantes mesurées (voir le schéma ci-dessus) :

- depuis la station  $O_1$  : les distances  $O_1A$ ,  $O_1B$  et  $O_1D$ ;
- depuis la station  $O_1$  : les gisements  $V_{A/O_1}$ ,  $V_{B/O_1}$  et  $V_{D/O_1}$ ;
- lors du transfert de gisement nous avons également mesuré la distance  $O_1O_2$  ainsi que le gisement  $V_{O_2/O_1}$ ;
- depuis la station  $O_2$  : la distance  $O_2C$  et le gisement  $V_{C/O_2}$ .

Calculez les coordonnées des points  $A, B, C, D$  dans le repère orthonormé direct de la station 1 :  $(O_1, \text{Est1}, \text{Nord1})$  en fonction des différentes valeurs mesurées.

*Remarque : cet exercice peut être décliné en mettant la base n'importe où autour du bâtiment. Dans le cas pratique, on réalise un levé avec 14 transferts de gisement et ensuite on calcule les coordonnées dans le repère initial. Le gisement est toujours mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.*

**Exercice 82** Le problème de mathématiques (Solution)

1. Calculer les coordonnées de  $A, B$  et  $D$  dans  $(O_1, \text{Est1}, \text{Nord1})$ , le repère orthonormé direct de la station 1.
2. Calculer les coordonnées de  $C$  dans  $(O_2, \text{Est2}, \text{Nord2})$ , le repère orthonormé direct de la station 2.
3. Calculer les coordonnées de  $O_2$  puis de  $C$  dans  $(O_1, \text{Est1}, \text{Nord1})$ .

**Exercice 83** Jalibert-Ntamack (Solution)

A quelle distance faut-il que le buteur recule pour que l'angle sous lequel il voit les poteaux soit le plus ouvert possible ?

1. On choisit un repère de sorte que le ballon  $B$ , les poteaux  $P_1$  et  $P_2$  aient pour coordonnées  $B(0, z)$ ,  $P_1(a, 0)$  et  $P_2(b, 0)$  avec  $z > 0$ . Représenter ce repère sur la figure.
2. Calculer les composantes des vecteurs ballon-poteaux  $\overrightarrow{BP_1}$  et  $\overrightarrow{BP_2}$  et leurs normes.
3. On note  $\theta$  l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{BP_1}$  et  $\overrightarrow{BP_2}$ . Calculer le produit scalaire entre ces deux vecteurs de deux manières.
4. Isoler  $\cos(\theta)$  pour l'exprimer en fonction de  $z$ .
5. Soit

$$f(z) = \frac{ab + z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}\sqrt{b^2 + z^2}}$$

avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .

- (a) Que vaut la fonction pour  $a = b$  ?

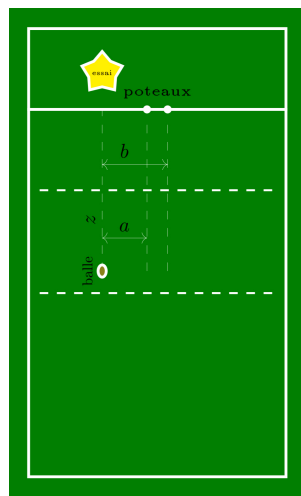
On considère désormais  $a \neq b$ .

- (b) On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et admet pour dérivée :

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad f'(z) = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab)(z^2 - abz)}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Etudier les variations de  $f$ .

- (c) Déterminer la valeur maximale de l'angle  $\theta$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- (d) Expliquer dans quels cas sur le terrain on peut se contenter de prendre  $z \approx \frac{a+b}{2}$  (on pourra utiliser l'exercice 57)



# Chapitre 8

## Fonctions exponentielles

### Exercice 84 (Solution)

Soit  $n$  un entier relatif. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 2^n \times 2 & \text{b)} & \frac{2^{3n+1}}{2^{2n+2}} & \text{c)} & (2^{n+1})^3 \times 2^{-1} \\ \text{d)} & \frac{4^{n+2}}{2^{2n}} \times \frac{1}{8} & \text{e)} & \frac{2^{n+3}}{4^{-n}} \times 2^{-n} \end{array}$$

### Exercice 85 Fonction exponentielle et calculs (1) (Solution)

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & (e^x)^5 e^{-2x} & \text{b)} & \frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}} & \text{c)} & \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} \end{array}$$

### Exercice 86 Fonction exponentielle et calculs (2) (Solution)

Démontrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x - 1 & \text{b)} & (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4 \\ \text{c)} & \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} & \text{d)} & e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \end{array}$$

### Exercice 87 Fonction exponentielle et équations (Solution)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & e^x = 1 & \text{b)} & e^{2x} = e & \text{c)} & e^x = e^{-x} \\ \text{d)} & e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3 & \text{e)} & e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}} \end{array}$$

### Exercice 88 Fonction exponentielle et limites (1) (Solution)

Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f_1(x) = e^{-3x} & \text{b)} & f_2(x) = e^x + e^{-x} & \text{c)} & f_3(x) = x + e^x \\ \text{d)} & f_4(x) = e^{2x} + e^x + 1 & \text{e)} & f_5(x) = e^{3x} - e^x & \text{f)} & f_6(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2} \end{array}$$

### Exercice 89 Fonction exponentielle et limites (2) (Solution)

Déterminer les limites en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f_1(x) = x^2 + 2 - e^x & \text{b)} & f_2(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} & \text{c)} & f_3(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \\ \text{d)} & f_4(x) = e^{2x} - (x+1)e^x & \text{e)} & f_5(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x} & \text{f)} & f_6(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 2} \end{array}$$

**Exercice 90** Fonction exponentielle et développement limité (Solution)

Donner une valeur approchée de  $a = \exp(10^{-3})$ , de  $b = \exp(1,05)$  (on prendra 2,718 comme valeur approchée de  $e$ ).

**Exercice 91** Fonction exponentielle et étude de fonction (Solution)

Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1 m de longueur. Cette température est modélisée par :

$$T(x) = 170 - 150e^{-0,6x},$$

où  $x \in [0; 1]$  est la distance, en mètres, parcourue par le fluide son entrée dans le capteur, et  $T(x)$  est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. Etudier les variations de la température  $T$  sur  $[0; 1]$ . En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
4. Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentant la température.



Contexte : Potentiel de MORSE

Le potentiel de MORSE modélise l'énergie d'interaction entre deux atomes au sein d'une molécule. Il est donné, en fonction de la distance  $r$  entre les deux atomes par :

$$V(r) = D \left( 1 - e^{\alpha(r-r_0)} \right)^2$$

où  $D, \alpha$  et  $r_0$  sont différentes constantes positives non précisées. On souhaite faire une étude rapide et une représentation rapide graphique de ce potentiel en fonction de  $r$ .

**Exercice 92** (Solution)

On définit sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $V(r) = D \left( 1 - e^{\alpha(r-r_0)} \right)^2$ .

1. Déterminer  $V'(r)$  et étudier son signe.
2. Calculer  $V(0)$  et  $V(r_0)$  puis déterminer  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r)$ . Dans le contexte de l'exercice, de la valeur trouvée pour  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r)$ .
3. Faire un tableau de variation puis une représentation sommaire.



Contexte : Potentiel de LENNARD-JONES

Le potentiel de LENNARD-JONES modélise l'énergie d'interaction entre deux atomes au sein d'un gaz monoatomique de type gaz rare. Il est également utilisé pour l'interaction de molécules. Son expression en fonction de la distance  $r$  entre les deux atomes est :

$$V(r) = 4\epsilon \left( \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right)^2$$

où  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont différentes constantes strictement positives.

**Exercice 93** (Solution)

1. Déterminer pour quelle valeur de  $r$  le potentiel  $V(r)$  s'annule, puis étudier son signe.
2. Déterminer  $\lim_{r \rightarrow 0} V(r)$  et montrer que :

$$V(r) \approx 4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}$$

lorsque  $r$  est proche de 0 (c'est-à-dire quand les atomes sont à courtes distances).

3. Déterminer  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r)$  et montrer que :

$$V(r) \approx -4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6$$

lorsque  $r$  est proche de 0 (c'est-à-dire quand les atomes sont à longues distances).

4. Déterminer  $V'(r)$  et étudier son signe. On notera  $r_{\text{eq}}$  la valeur pour laquelle  $V'(r) = 0$ . Calculer  $V(r_{\text{eq}})$ .
5. Faire un tableau de variation puis une représentation sommaire. On représentera aussi approximativement les fonctions

$$r \mapsto 4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} \quad \text{et} \quad r \mapsto -4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6$$





# Chapitre 9

## Fonctions logarithmiques

Avertissement : dans tout ce chapitre on note  $\ln$  la fonction logarithme népérien et  $\log$  la fonction logarithme décimal (logarithme de base 10).

### Exercice 94 Fonction logarithme et calculs (Solution)

1. Exprimer  $a$  en fonction de  $\ln(3)$ ,  $b$  et  $c$  en fonction de  $\ln(2)$ .

$$a = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right), \quad b = \ln\left(\frac{1}{16}\right), \quad c = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}).$$

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de  $\ln(2)$  et  $\ln(5)$

$$a = \ln(50), \quad b = \ln\left(\frac{16}{25}\right), \quad c = \ln(250)$$

3. Démontrer que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0.$$

4. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue un entier naturel  $n$  :

$$a) 2^n \leq 100, \quad b) \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-n}, \quad c) 0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad d) \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \leq 2.$$

### Exercice 95 Fonction logarithme simplifications (Solution)

Simplifier au maximum, c'est-à-dire, écrire sous la forme  $a + b \ln(c)$  avec  $c$  l'entier le plus petit possible :

$$A = \ln(e^3) - \ln(e^2)$$

$$B = \ln(e\sqrt{e})$$

$$C = \ln(2) + \ln(16e) - \ln(4e^2)$$

$$D = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$

$$E = 3(\ln(3) + \ln(5)) - \ln(27) - 2\ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$F = e^{\ln(3)}$$

$$G = \frac{e^{3+\ln(8)}}{e^{2+\ln(4)}}$$

$$H = \frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$$

### Exercice 96 Fonction logarithme et équations (Solution)

Résoudre les équations suivantes en précisant d'abord le domaine de validité :

$$a) \ln(2 - 2x) = 1$$

$$b) \ln(2 - x) = -3$$

$$c) \ln(x^2 - 8) = 0$$

$$d) e^{x+2} = 3$$

$$e) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$f) \ln(x^2 - 4) = \ln(3x - 4)$$

### Exercice 97 Fonction logarithme et développement limité (Solution)

Donner une valeur approchée de  $a = \ln(1,007)$  et  $b = \ln(2,05)$  (on prendra 0,693 comme valeur approchée de  $\ln(2)$ ).

### Exercice 98 Etude d'une fonction et allure de la courbe représentative (Solution)

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction qui a pour expression :

$$f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right).$$

2. Montrer que  $f$  est impaire. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de la fonction  $f$  ?
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . En utilisant que  $f$  est impaire, déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ .
4. Calculer  $f'(x)$  et donner le tableau de variation de  $f$  en précisant les limites aux bornes du domaine de définition.
5. Donner l'allure de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  avec les asymptotes à la courbe. On fera aussi figurer les points de  $\mathcal{C}$  qui ont pour abscisse  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  ainsi que les tangentes en ces points.



**Exercice 99** Fonction exponentielle et logarithme (Solution)

Le pH d'une solution aqueuse est  $-\log(a(H_3O^+))$  où  $a(H_3O^+)$  est l'activité en ions  $H_3O^+$ , c'est-à-dire la concentration exprimée en moles par litre. Une solution est acide si :

$$a(H_3O^+) > a(HO^-).$$

A  $25^\circ \text{C}$  on a :  $a(H_3O^+) \times a(HO^-) = 10^{-14}$ .

A  $37^\circ \text{C}$  on a :  $a(H_3O^+) \times a(HO^-) = 10^{-13.6}$ . Donner une condition sur le pH pour qu'une solution soit acide à  $25^\circ \text{C}$ , puis à  $37^\circ \text{C}$ . Quelle est l'activité du pH neutre ( $=7$ ) d'une solution acide de pH 6 et d'une solution basique de pH 8 ?



**Exercice 100** Logarithme et nombre de chiffres (Solution)

1. On considère  $a_1 = 234 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$ . A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de  $\log(a_1)$  et comparer au nombre de chiffres de  $a_1$ .
2. Procéder de même pour  $a_2 = 1579843$ .
3. Soit le nombre  $b = 2^{12345}$ . Donner un encadrement de longueur 1 de  $\log(b)$ .
4. En déduire le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de  $b$ .



**Exercice 101** Echelle de RICHTER (Solution)

La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de RICHTER, est évaluée à partir de l'amplitude  $A$  des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule

$$M = \log(A) - \log(A_0),$$

où  $A_0$  désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu  $A = 3,98107A_0$ . Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de RICHTER.
2. La magnitude d'un séisme est 5. Déterminer le rapport  $\frac{A}{A_0}$  de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de RICHTER ?

**Exercice 102** pH d'une solution (Solution)

La molarité en ions  $H^+$  d'une solution est le nombre, noté  $[H^+]$  de moles par litre d'ions  $H^+$  ;  $[H^+]$  s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 ( $10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$  par exemple). On lui préfère donc le pH défini par  $\text{pH} = -\log([H^+])$ .

1. Quel est le pH d'une solution contenant  $3.10^{-7}$  moles d'ions  $H^+$  par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions  $H^+$  d'une solution neutre ( $\text{pH} = 7$ ) ?

**Exercice 103** Complexité - comparaisons et limites de fonctions (Solution)

On considère les fonctions suivantes définies sur  $]0; +\infty[$  :

$$f_1(x) = \ln(x) \quad f_2(x) = x \quad f_3(x) = x^2 \quad f_4(x) = x^2 + 4x$$

$$f_5(x) = x \ln(x) \quad f_6(x) = x\sqrt{x} \quad f_7(x) = x^2 + 1000x \quad f_8(x) = x^2 + 1000x\sqrt{x}.$$

1. Calculer les limites suivantes en  $+\infty$

$$a) \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad b) \frac{f_2(x)}{f_5(x)}, \quad c) \frac{f_6(x)}{f_3(x)}, \quad d) \frac{f_4(x)}{f_3(x)}.$$

2. En informatique, un algorithme avec une entrée de taille l'entier  $n$ , peut nécessiter :

- $n$  opérations : algorithme linéaire (par exemple, recherche naïve dans une liste de nombres)
- $\ln(n)$  opérations : algorithme logarithmique (par exemple, recherche dichotomique dans une liste triée de nombres),
- $n \ln(n)$  opérations : algorithme pseudo-linéaire (par exemple, trier une liste de nombres),
- $n^2$  opérations : algorithme quadratique (par exemple, recherche naïve d'un doublon dans une liste de nombres).

Classer ces algorithmes par ordre croissant d'opérations lorsque  $n$  tend vers l'infini.

3. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n^2} = 1$ , on dit encore que  $f(n)$  correspond à un algorithme quadratique. Parmi les fonctions  $f_i$  ( $1 \leq i \leq 8$ ) lister (en le justifiant) celles qui correspondent à un algorithme quadratique.
4. Que pouvez-vous dire en terme d'opérations pour  $f_6(n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

*En pratique les algorithmes les plus courants sont au moins linéaires, éventuellement pseudo-linéaires. Quand les algorithmes sont au moins quadratiques, cela pose très vite un problème en pratique (pour trier une liste d'un million d'éléments par exemple).*



Contexte : Effet photoélectrique

La résistance  $R$  d'une photorésistance peut être modélisée par :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_E}$$

où  $R_E = KE^{-\eta}$  avec  $K > 0$ ,  $\eta > 0$  et  $E$  l'éclairement lumineux. Quelle est l'allure de  $R$  en fonction de  $E$  lorsque  $E$  est petit, lorsque  $E$  est grand et comment mesurer  $\eta$  ?

**Exercice 104** Le problème de mathématiques (Solution)

Soit  $a, b$  et  $c$  trois constantes strictement positives fixées et  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{bx^{-c}}.$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{bx^{-c}}$ .
3. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) - (\ln(b) - c \ln(x)) = 0$ .
4. Qu'obtient-on lorsqu'on représente les points de coordonnées  $(\ln(x), \ln(b) - c \ln(x))$  pour  $x > 0$  ?
5. Justifier que les points de coordonnées  $(\ln(x), \ln(f(x)))$  et  $(\ln(x), \ln(b) - c \ln(x))$  sont proches pour  $x$  grand. En déduire une méthode graphique pour estimer la valeur de  $c$ .



Contexte : Suivi cinétique par pH-métrie

On suit la cinétique d'une réaction par pH-métrie et on obtient les résultats suivants :

|                |      |      |      |       |      |
|----------------|------|------|------|-------|------|
| $t(\text{ms})$ | 0    | 5    | 11   | 18    | 25   |
| pH             | 11.7 | 11.5 | 11.3 | 11.05 | 10.8 |

La réaction est d'ordre 1 par rapport à l'ion hydroxyde  $HO^-$  si la concentration  $[HO^-]$  vérifie :

$$[HO^-] = [HO^-](0) \times e^{-8k_{\text{app}}t}.$$

On rappelle que le produit ionique de l'eau est  $K_e = [H_3O^+][HO^-] = 10^{-14}$  et que  $\text{pH} = -\log([H_3O^+])$ .

Montrer que la réaction est d'ordre 1 par rapport à l'ion hydroxyde et déterminer la constante de vitesse apparente  $k_{\text{app}}$ .

#### Exercice 105 Le problème de mathématiques (Solution)

1. Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs positives telles que  $f(t)g(t) = 10^{-14}$ . Justifier que :

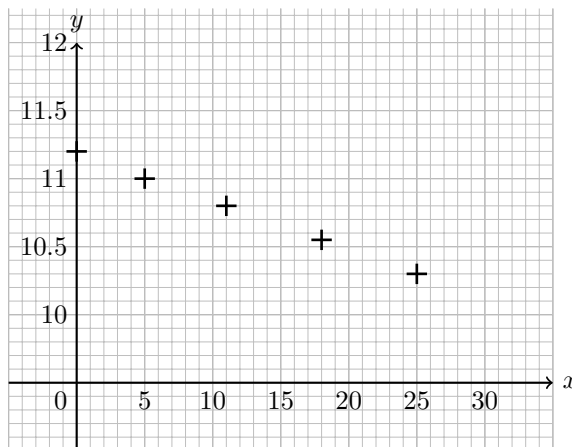
$$g(t) = ae^{-8kt} \iff -\log(f(t)) = 14 + \log(a) - \frac{8k}{\ln(10)}t.$$

2. On dispose des mesures suivantes ( $t$  exprimé en secondes)

|     |      |      |      |       |      |
|-----|------|------|------|-------|------|
| $t$ | 0    | 5    | 11   | 18    | 25   |
| pH  | 11.7 | 11.5 | 11.3 | 11.05 | 10.8 |

et on cherche à vérifier empiriquement si la fonction  $g$  peut s'écrire  $g(t) = ae^{-8kt}$  avec  $k$  à déterminer.

Dans un repère orthogonal, on a placé les points de coordonnées  $(t, -\log(f(t)))$  pour les mesures faites.



Justifier empiriquement que l'on a bien  $g(t) = ae^{-8kt}$  puis déterminer  $k$  et  $a$ .



Contexte : Loi d'ARRHÉNIUS

Lors d'une réaction chimique on a mesuré la consante de vitesse  $k$  à différentes températures  $T$ .

|                 |      |      |      |       |
|-----------------|------|------|------|-------|
| $T (^{\circ}C)$ | 0    | 10   | 20   | 40    |
| $k (s^{-1})$    | 1.00 | 2.08 | 4.38 | 16.02 |

La réaction suit la loi d'ARRHÉNIUS si on a  $k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$  où  $R = 8,314 J.mol^{-1}.K^{-1}$  est la constante des gaz parfaits et  $E_a$  est l'énergie d'activation (en  $J.mol^{-1}$ ). Montrer que la réaction suit la loi d'ARRHÉNIUS et calculer son facteur pré exponentiel et son énergie d'activation.

### Exercice 106 Le problème de mathématiques (Solution)

On dispose des mesures ci-dessus et on cerhche à vérifier empiriquement si la fonction  $k$  peut s'écrire  $k(T) = Ae^{\frac{B}{T}}$  avec  $B$  à déterminer.

1. Dans un repère orthogonal, placer les points de coordonnées  $(\frac{1}{T}, k)$  pour les mesures faites ; avec  $T$  exprimé en kelvin ( $0^{\circ}C = 273,15K$ ).
2. Justifier que  $k(T) = Ae^{\frac{B}{T}}$  équivaut à l'alignement des points puis conclure dans le cas étudié.
3. Déterminer empiriquement la valeur de  $B$  et de  $A$ , puis la valeur de  $E_a$ , l'énergie d'activation.



Contexte : Cinétique chimique

Si  $c$  est la concentration d'un réactif, on a une réaction

- d'ordre 0 lorsque  $c(t) = c_0 - kt$ ;
- d'ordre 1 lorsque  $c(t) = c_0 e^{-kt}$ ;
- d'ordre 2 lorsque  $c(t) = \frac{c_0}{1+c_0 kt}$ .

Selon l'hypothèse que l'on souhaite valider à partir de données expérimentales, quel type de représentation faut-il faire pour se ramener à une fonction affine et comment déterminer alors  $k$  ?

### Exercice 107 Le problème de mathématiques (Solution)

Soit  $c_0 > 0$ , dans chacun des cas suivants déterminer une fonction  $g$  de sorte que la fonction composée  $g \circ c$  soit affine et préciser le lien entre  $k$  et le coefficient directeur de la droite de la représentation graphique de  $g \circ c$ .

1.  $c(t) = c_0 - kt$ .
2.  $c(t) = c_0 e^{-kt}$ .
3.  $c(t) = \frac{c_0}{1+c_0 kt}$ .



Contexte : Enthalpie libre du mélange idéal

Un mélange est décrit par une enthalpie libre molaire de mélange  $\Delta g_{\text{mix}}$ , dépendant de la température et de la fraction molaire  $x$  du mélange. Un mélange de composition  $x_0$  donnée n'est stable que si  $\Delta g_{\text{mix}}$  est convexe autour de  $x_0$  (on montrera que la dérivée seconde de  $\Delta g_{\text{mix}}$ ,  $\Delta g''_{\text{mix}}$ , est positive sur un intervalle autour de  $x_0$ ). Sinon, la solution se sépare en deux liquides non-miscibles. Dans un mélange idéal on a pour  $x \in ]0; 1[$  :

$$\Delta g_{\text{mix}}(x) = RT(x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x))$$

On veut montrer que dans ce cas le mélange est toujours stable.

**Exercice 108** Le problème de mathématiques (Solution)

On définit sur  $]0; 1[$  la fonction  $f$  par :

$$\forall x \in ]0; 1[, \quad f(x) = x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x).$$

1. Montrer que  $f(x) \leq 0$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ .
3. Calculer  $f''(x)$  et montrer que  $f''(x) \geq 0$  sur  $]0; 1[$ .
4. Faire un tableau de variation puis une représentation sommaire.

# Chapitre 10

## Intégrales

**Exercice 109** Connaissez-vous votre cours ? (Solution)

Remplissez le tableau suivant

| Fonction $f$                                 | Primitive $F$ | sur                                                                    |
|----------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = 0$                                   | $F(x) =$      | $\mathbb{R}$                                                           |
| $f(x) = k$                                   | $F(x) =$      | $\mathbb{R}$                                                           |
| $f(x) = e^x$                                 | $F(x) =$      | $\mathbb{R}$                                                           |
| $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$            | $F(x) =$      | $]0; +\infty[$                                                         |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                         | $F(x) =$      | $] -\infty; 0[$ ou $]0; \infty[$                                       |
| $f(x) = \frac{1}{x+a}$                       | $F(x) =$      | $] -\infty; -a[$ ou $]a; +\infty[$                                     |
| $f(x) = \sin(x)$                             | $F(x) =$      | $\mathbb{R}$                                                           |
| $f(x) = \cos(x)$                             | $F(x) =$      | $\mathbb{R}$                                                           |
| $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ | $F(x) =$      | $] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$ |

**Exercice 110** Calcul direct de primitive (Solution)

En utilisant le tableau des primitives donné en cours, déterminer une formule explicite pour les primitives suivantes en précisant sur quel(s) intervalle(s) elles sont définies.

$$\int x^3 dx, \quad \int \frac{dx}{x^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad \int \sin(x) dx, \quad \int \tan(x)^2 dx$$

**Exercice 111** Calcul de primitive avec  $f(x)$  de la forme  $u'(ax+b)$  (Solution)

1. Pour  $a \neq 0$ , déterminer  $\int u'(ax+b) dx$
2. Application : calculer les primitives suivantes

$$\int \cos(3x-5) dx, \quad \int \sin(2-x) dx, \quad \int \left(\frac{x}{4} + 1\right)^3 dx, \quad \int e^{-kt} dt \text{ avec } k \neq 0, \quad \int \frac{dx}{x-2}.$$

**Exercice 112** Calcul de primitive avec  $f(x)$  de la forme  $u'(x)u(x)^\alpha$  avec  $\alpha$  réel (Solution)

1. Déterminer  $\int u'(x)u(x)^{-1} dx$ .
2. Pour  $\alpha \neq -1$ , déterminer  $\int u'(x)u(x)^\alpha dx$ .
3. Application : calculer les primitives suivantes

$$\int x^4(1+x^5)^5 dx, \quad \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int \sin^3(t) \cos(t) dt, \quad \int \frac{x}{x^2-3} dx$$

et

$$\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{\frac{4}{5}}} \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

**Exercice 113** Calcul de primitive avec  $f(x)$  de la forme  $u'(x)e^{u(x)}$  (Solution)

1. Déterminer  $\int u'(x)e^{u(x)} dx$
2. Application : calculer les primitives suivantes

$$\int e^{1-3x} dx, \quad \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx \text{ sur } ]0; +\infty[, \quad \int x e^{x^2} dx, \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

**Exercice 114** Calcul de primitives (Solution)

1. Déterminer  $\int v'(x)u'(v(x)) dx$ .
2. Calculer les primitives suivantes en reconnaissant à chaque fois la dérivée d'une fonction composée :

$$\text{sur } \mathbb{R}, \quad \int x\sqrt{1+x^2} dx, \quad \text{sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \int \tan(x) dx;$$

et

$$\text{sur } \mathbb{R}^{+*}, \quad \int \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad \text{sur } ]1; +\infty[, \quad \int \frac{1}{x \ln(x)} dx;$$

**Exercice 115** Intégrale et symétrie (Solution)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-A; A]$  et paire. On note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[-A; A]$ .

1. Montrer que  $t \mapsto F(-t)$  est une primitive de  $t \mapsto -f(-t)$  sur  $[-A; A]$ .
2. En déduire que :

$$\int_{-A}^0 f(-t) dt = F(A) - F(0)$$

puis que :

$$\int_{-A}^0 f(t) dt = \int_0^A f(t) dt.$$

3. Montrer que :

$$\int_{-A}^A f(t) dt = 2 \int_0^A f(t) dt.$$

Illustrer graphiquement ce résultat lorsque  $f$  est de plus positive sur  $[-A; A]$ .

**Exercice 116** Intégration par parties (IPP) (1) (Solution)

1. Calculer  $\int_1^2 t^2 \ln(t) dt$ .



2. Calculer  $\int_1^2 \ln(t) dt$ .
3. Sur  $]0; +\infty[$  déterminer  $\int \ln(t) dt$ , une primitive de la fonction  $\ln$ .

**Exercice 117** Intégration par parties (IPP) (2) (Solution)

Calculer en intégrant par parties

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos(t) dt, \quad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt, \quad \int_0^{\pi} t^2 \cos(t) dt.$$

**Exercice 118** Intégration par parties (IPP) (3) (Solution)

1. Calculer à l'aide deux intégrations par parties  $\int_0^2 x^2 \exp(x) dx$ .
2. Déterminer  $a, b$  et  $c$  tels que la fonction  $x \mapsto (ax^2 + bx + c) \exp(x)$  soit une primitive de  $x \mapsto x^2 \exp(x)$  puis retrouver la valeur de  $\int_0^2 x^2 \exp(x) dx$ .

**Exercice 119** Intégration par parties (IPP) (4) (Solution)

**Ma boîte à outils**

 Pour intégrer  $t \mapsto e^{mt}P(t)$  où  $m \neq 0$  et  $t \mapsto P(t)$  est un polynôme en  $t$ . On cherche une primitive de la forme  $t \mapsto e^{mt}Q(t)$  où  $t \mapsto Q(t)$  est un polynôme de même degré que  $t \mapsto P(t)$ . Variante : faire des intégrations par parties jusqu'à intégrer une exponentielle multipliée par une constante.

Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 (t^2 - 3t + 1)e^{2t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 (t - 2 - t - 1)e^{-t} dt.$$

**Exercice 120** Intégration par parties (IPP) (5) (Solution)

On veut calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)e^t dt$ .

1. En faisant deux intégrations par parties, vérifier que  $I = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$ .
2. En déduire la valeur de  $I$ .
3. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $t \mapsto (a \cos(t) + b \sin(t))e^t$  soit une primitive de  $t \mapsto \cos(t)e^t$  puis retrouver la valeur de  $I$ .

**Exercice 121** Intégrale d'une exponentielle multipliée par une fonction trigonométrique (Solution)

**Ma boîte à outils**

 Pour intégrer  $t \mapsto e^{mt} \cos(\omega t)$  ou  $t \mapsto e^{mt} \sin(\omega t)$  avec  $m \neq 0$  et  $\omega > 0$ . Observer qu'il est possible de faire deux intégrations par parties à la suite. Variante : chercher une primitive de la forme  $t \mapsto e^{mt}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$ .

Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos(4t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-t} \sin(2t) dt.$$

**Exercice 122** Calcul d'aire - fraction rationnelle (Solution)

1. Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  différent de  $-1$  on ait :

$$\frac{4-x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

En déduire le calcul de :

$$\int_1^2 \frac{4-x^2}{x+1} dx, \quad \int_1^3 \frac{4-x^2}{x+1} dx \text{ et } \frac{4-x^2}{x+1} dx.$$

2. En faisant une étude rapide sur  $[1; 3]$  de la fonction définie par  $f(x) = \frac{4-x^2}{x+1}$ , donner l'allure de la courbe  $\mathcal{C}$  de cette fonction.
3. Déterminer l'aire délimitée par les droites  $x = 1$  et  $x = 3$ , l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$ . On pourra d'abord calculer d'abord la partie de cette aire qui est au-dessus de l'axe des abscisses puis celle qui est en-dessous.



Contexte : Intégrales

Dans le cas d'un sol partiellement saturé, le modèle d'infiltration de HORTON fait l'hypothèse que lorsque qu'il pleut, la capacité d'infiltration du sol diminue au cours du temps, au fur et à mesure que le sol se sature. Ce modèle est exprimé par :

$$F(t) = F_C + (F_0 - F_C)e^{-kt}$$

où  $F(t)$  est la capacité d'infiltration du sol au temps  $t$  ( $F(t)$  en  $mm/min$  et  $t$  en  $min$ ),  $F_C(mm/min)$  est la capacité d'infiltration du sol asymptotique c'est-à-dire lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,  $F_0(mm/min)$  est la capacité d'infiltration initiale du sol et  $k$  un paramètre ( $min^{-1}$ ).

1. Tracer  $F$  en fonction du temps  $t$  (par pas de 5 min et jusqu'à  $t = 30$  min) et représenter sur le graphique la quantité d'eau qui s'est infiltrée dans les dix premières minutes.
2. Calculer la quantité  $H$  d'eau (en mm) qui s'est infiltrée en 10 minutes.
3. Evaluer la quantité d'eau infiltrée en 10 minutes en utilisant la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de l'intégrale  $F$ . Utiliser cette méthode sur plusieurs nombres de rectangles différents et observer la précision obtenue (en comparant avec la valeur exacte calculée à la question précédente).

**Exercice 123** Le problème de mathématiques (Solution)

1. Tracer la courbe représentation de  $F$  sur l'intervalle  $[0; 30]$  en plant tous les points d'abscisse multiple de 5.
2. Calculer  $H = \int_0^{10} F(t) dt$ .
3. Que fait le programme Python ci-dessous ?

```
import math
def infiltration(a,b,k,n):
    int = 0
    for i in rang(n):
        int = int + (b+(a-b)*math.exp(-k*i*10/n))*10/n
    return int
```

4. Le faire tourner pour différentes valeurs de  $n$  et comparer à  $H$ .



Contexte : Distribution volumique de charge (Intégrales)

On considère une distribution de charge en volume, en équilibre, contenue dans la sphère  $S(O, r_0)$ . La densité de charge par unité de volume  $\rho$  varie linéairement en fonction de  $r$  (pour  $0 < r < r_0$ ) suivant la loi :

$$\rho(r) = a(r_0 - r)$$

Quelle est la dimension de la constante positive  $a$  ? Calculer la charge totale  $Q$  contenue dans  $S$ .

**Exercice 124** Le problème de mathématiques (Solution)

Calculer

$$I = \int_0^{r_0} (r - r_0)r^2 dr.$$

On aura alors  $Q = a \times 4\pi I$ .



# Chapitre 11

---

## Equations différentielles

### Exercice 125 (Solution)

Donner toutes les solutions,  $y : t \mapsto y(t)$ , des équations différentielles homogènes suivantes :

1.  $y' + y = 0$ , sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $y' + 5y = 0$ , sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $2y' - 5y = 0$ , sur  $\mathbb{R}$ .
4.  $y' + t^2y = 0$ , sur  $\mathbb{R}$ .
5.  $y' = ty$ , sur  $\mathbb{R}$ .
6.  $ty' + y = 0$ , sur  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 126 (Solution)

1. Vérifier que  $t \mapsto f(t) = t^2 - 2t + 2$  est solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' + y = t^2.$$

2. En déduire toutes les solutions de  $y' + y = t^2$ .

### Exercice 127 (Solution)

Soit l'équation différentielle  $(E) : 2y' - 4y = -5e^{2t}$ .

1. Déterminer une solution particulière de la forme  $f(t) = ate^{2t}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
3. Quelle est la solution de  $(E)$  vérifiant  $y(0) = -1$ .

### Exercice 128 (Solution)

Soit l'équation différentielle  $(E) : y' + 3t^2y = t^2$ .

1. Déterminer  $(H)$ , l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$  et donner toutes les solutions de  $(H)$ .
2. Déterminer une solution particulière de  $(E)$  (on pourra chercher une solution constante  $y_P(t) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
4. Quelle est la solution de  $(E)$  vérifiant  $y(0) = 1$ .

### Exercice 129 (Solution)

Le but de cet exercice est de résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle

$$y' - 7y = e^x. \tag{E}$$

1. Déterminer  $(H)$ , l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle homogène.

3. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme  $y_P(x) = ae^x$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  à déterminer.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

**Exercice 130** (Solution)

Le but de cet exercice est de résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle

$$y' + 5y = e^{-5t} \sin(t) + 13 \cos(t). \quad (E)$$

1. Déterminer (H), l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle homogène.
3. Vérifier que  $y_1(t) = \frac{5}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$  est une solution particulière de :

$$y' + 5y = 13 \cos(t). \quad (E_1)$$

4. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle
- 5.

$$y' + 5y = e^{-5t} \sin(t). \quad (E_2)$$

(on pourra chercher une solution de la forme  $y_2(t) = ae^{-5t} \cos(t)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  à déterminer).

6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

**Exercice 131** (Solution)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{2}{t}y = 1, \quad t \in ]0; +\infty[. \quad (E)$$

1. Ecrire l'équation homogène associée à (E) et la résoudre.
2. Trouver une solution particulière de (E) (on pourra chercher une solution de la forme  $y_P(t) = at$  où  $a$  est une constante à déterminer).
3. Déterminer toutes les solutions de (E).
4. Déterminer l'unique solution de (E) qui vérifie  $y(1) = 1$ .

**Exercice 132** (Solution)

Résoudre les problèmes suivants :

1.  $y' + y = 0$  avec  $y(0) = 1$
2.  $2y' - y = 0$  avec  $y(0) = 1$
3.  $y = ty$  avec  $y(0) = 1$
4.  $y' + 5y = 3$  avec  $y(0) = 0$
5.  $y' + 3y = 4e^t$  avec  $y(0) = -2$  (on pourra chercher une solution particulière de la forme  $y_P(t) = ae^t$ , où  $a$  est une constante à déterminer).

**Exercice 133** (Solution)

Résoudre les équations différentielles

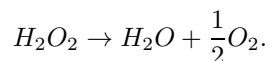
1.  $y' + y \cos(t) = 0$
2.  $y' + ty = t$

3.  $ty' - y = t^3$  (on pourra chercher une solution particulière de la forme  $y_P(t) = ae^t$ , où  $a$  est une constante à déterminer).



Contexte : Cinétique d'ordre 1 (Equation différentielle)

On considère la réaction



L'évolution de la concentration en peroxyde d'hydrogène,  $[H_2O_2]$ , en fonction du temps vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d[H_2O_2]}{dt} = -k[H_2O_2]$$

avec  $[H_2O_2](0) = c_0$ .

1. Déterminer  $[H_2O_2](t)$ .
2. Déterminer le temps de 1/2 réaction, c'est-à-dire le temps au bout duquel la concentration en  $[H_2O_2]$  aura diminué de moitié.



Contexte : Pression d'une atmosphère isotherme

On considère un gaz de température constante  $T = 25^\circ \text{C}$  à toute altitude. On note  $z$  la direction ascendante et  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  l'intensité de pesanteur.

1. En faisant un bilan des forces à une tranche d'air d'épaisseur  $dz$ , montrer que la pression vérifie l'équation :

$$\frac{dP}{dz} = -cmg$$

où  $c$  est le nombre de molécules par unité de volume et  $m$  la masse d'une molécule de gaz.

2. En utilisant la loi des gaz parfaits, établir une équation différentielle portant sur la pression. La résoudre en faisant apparaître une hauteur caractéristique  $H$  que l'on calculera pour du dioxygène ou du diazote.
3. On modélise l'atmosphère comme ayant une température constante et étant formé d'un gaz parfait de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ . A quelle altitude la pression a-t-elle diminué de moitié ?

La loi des gaz parfaits donne  $c = \frac{P}{k_b T}$  donc

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{k_b T} P.$$

On note  $H = \frac{k_B T}{mg}$ . A  $T = 25^\circ \text{C}$  on a  $H_{O_2} = 7,9 \text{ km}$ ,  $H_{N_2} = 9 \text{ km}$  et  $H_{\text{air}} = 8,7 \text{ km}$ .

### Exercice 134 Le problème de mathématiques (Solution)

Soit  $k > 0$  et  $y_0$  fixés, résoudre l'équation différentielle  $y'(t) = -ky(t)$ . On note  $f$  la solution de l'équation qui satisfait la condition initiale  $f(0) = y_0$ , déterminer  $f$  puis résoudre  $f(y) = \frac{y_0}{2}$ . Faire l'application numérique du contexte précédent.



Contexte : Equation de CLAPEYRON

L'équation de CLAPEYRON décrit la relation qui existe entre température et pression de vapeur lors de la transition liquide/vapeur. Selon les hypothèses elle peut être

1. de la forme  $\frac{dP}{dT} = \frac{c_1}{T}$ ,
2. de la forme  $\frac{dP}{dT} = \frac{c_2 P}{T^2}$ .

Dans chaque cas intégrer l'équation entre les pressions  $P_1$  et  $P_2$  et les températures  $T_1$  et  $T_2$ .

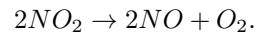
**Exercice 135** Le problème de mathématiques (Solution)

1. Résoudre l'équation différentielle  $y' = \frac{c_1}{t}$  avec la condition initiale  $y(t_1) = p_1$ . Puis calculer  $y(t_2)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $y' = \frac{c_2}{t^2} y$  avec la condition initiale  $y(t_1) = p_1$ . Puis calculer  $y(t_2)$ .
3. Traduire les deux calculs précédent à l'aide d'intégrales.



Contexte : Cinétique d'ordre 2 (Equation différentielle)

On considère la réaction



L'évolution de la concentration en dioxyde d'azote,  $[NO_2]$ , en fonction du temps vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d[NO_2]}{dt} = -k[NO_2]^2$$

avec  $[NO_2](0) = c_0$ .

1. Déterminer  $[NO_2](t)$ .
2. Déterminer le temps de 1/2 réaction, c'est-à-dire le temps au bout duquel la concentration en  $[NO_2]$  aura diminué de moitié.

**Exercice 136** Le problème de mathématiques (Solution)

Soit  $k > 0$ , on veut résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' = -ky^2$ .

1. Vérifier que la solution identiquement nulle est solution. On cherche maintenant une solution qui vérifie la condition initiale  $y(0) = y_0$ . On admet que l'on peut supposer que cette solution ne s'annule pas.
2. Montrer que  $y \mapsto y(t)$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $t \mapsto \frac{1}{y(t)}$  de  $(E') : z'(t) =$  avec  $z(0) = \frac{1}{y(0)}$ .
3. Résoudre  $(E')$  puis  $(E)$  ayant pour condition initiale  $y(0) = y_0 > 0$ .
4. Déterminer la valeur de  $t$  pour laquelle  $y(t) = \frac{y_0}{2}$ .





Contexte : Evolution de la concentration pour deux réactions successives

On a deux réaction successives, le réactif  $A$  donne le réactif  $B$  qui lui-même donne le réactif  $C$ . On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les concentrations des réactifs  $A, B$  et  $C$ . La concentration totale des réactifs est constante. Au début de la réaction ( $t = 0$ ) on n'a que le réactif  $A$  de concentration  $c_1(0) = a$ .

Le réactif  $A$  ne participant qu'à la réaction  $A \rightarrow B$ , sa concentration  $c_1$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -k_1 c_1(t)$$

avec  $k_1 > 0$  paramètre ne dépendant que du réactif  $A$ .

Le réactif participant aux deux réactions  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$ , sa concentration vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = k_1 c_1(t) - k_2 c_2(t)$$

avec  $k_2 > 0$  paramètre ne dépendant que du réactif  $B$  et  $k_2 \neq k_1$ .

Calculer  $c_1(t)$  puis  $c_2(t)$ . La concentration totale étant constante, on a alors  $c_3(t) = a - c_1(t) - c_2(t)$ .

### Exercice 137 Le problème de mathématiques (Solution)

1. Soit  $k_1 > 0$  et  $a > 0$ , résoudre  $y' = -k_1 y$  avec pour condition initiale  $y(0) = a$ .
2. Soit  $k_2 > 0$  et  $k_2 \neq k_1$ , résoudre  $y' = -k_2 y + k_1 a e^{-k_1 t}$ , avec pour condition initiale  $y(0) = 0$ . Pour cela on cherchera une solution particulière sous la forme  $y_P(t) = \alpha e^{-k_1 t}$  avec  $\alpha$  constante à déterminer.



Contexte : Evolution de la concentration pour deux réactions opposées

On a deux réaction opposées, le réactif  $A$  donne le réactif  $B$  qui lui-même donne le réactif  $A$ . La concentration totale des réactifs est constante. Au début de la réaction ( $t = 0$ ) on n'a que le réactif  $A$  de concentration  $a$ . On note  $c(t)$  la concentration du réactif  $B$  en fonction du temps, la concentration du réactif  $A$  est donc  $a - c(t)$  et la concentration  $c$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dc(t)}{dt} = k(a - c(t)) - k_2 c(t)$$

avec  $k_1 > 0$  paramètre ne dépendant que du réactif  $A$  et  $k_2 > 0$  un paramètre qui ne dépend que du réactif  $B$ .

Déterminer  $c(t)$ .



Contexte : Evolution de la température d'une masse d'eau chauffée avec pertes thermiques.

On chauffe une masse d'eau à l'aide d'une résistance. La pression est supposée constante ainsi que la température de l'environnement qui est aussi la température initiale de l'eau  $T_0$ . Sous ces conditions, la température de l'eau  $T$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc} \left( \frac{U^2}{R} - h(T - T_0) \right)$$

avec  $m = 1$  kg,  $c = 4,18$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $U = 220$  V,  $T_0 = 20^\circ$  C,  $h = 20$  W.K<sup>-1</sup> et  $R = 50$  Ω. Déterminer  $T$  et calculer la température maximale que l'eau peut atteindre ainsi que l'ordre de grandeur nécessaire pour atteindre cette température.

**Exercice 138** Le problème de mathématiques (Solution)

1. Soit  $k > 0$  et  $b \neq 0$ , déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle  $y' = -ky + b$ .
2. Pour les réactions opposées, trouver la solution satisfaisant la condition initiale  $y(0)$ .
3. Pour la masse d'eau, trouver toute la solution en satisfaisant la condition initiale  $y(0) = T_0$ , puis calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ .
4. Application numérique dans le cas de la masse d'eau.

**Exercice 139** Croissance de population : modèle de MALTHUS et modèle de VERHULST (Solution)

On considère une population formée de  $N$  individus et évoluant en fonction du temps  $t$ .

1. Dans le modèle de MALTHUS on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
  - (a) Justifier que dans ce modèle, la quantité  $N$  vérifie l'équation :

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = kN(t).$$

On suppose  $N$  dérivable, montrer que  $N' = kN$  avec  $k$  une constante (égale à la différence entre le taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle.)

- (b) Déterminer  $N$  si à l'instant  $t = 0$  la population est de  $N_0$  individus.
  - (c) Comment évolue cette population lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
2. Le modèle de VERHULST prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux  $k$  n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale et la population à l'instant  $t$ . On a alors  $k(t) = r(N^* - N(t))$  et  $N$  est solution de l'équation

$$N'(t) = rN(t)(N^* - N(t)),$$

appelée équation logistique.

- (a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose  $y(t) = \frac{1}{N(t)}$ , justifier que  $y$  est dérivable puis calculer  $N'$  en fonction de  $y$  et  $y'$ .
- (b) Remplacer  $N$  et  $N'$  par leurs expressions en fonction de  $y$  et  $y'$  dans l'équation logistique et vérifier que  $y$  est solution de l'équation différentielle

$$y' = r'(1 - N^*y).$$

- (c) Résoudre l'équation différentielle précédente.
- (d) En déduire que :

$$N(t) = \frac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$$

avec  $K$  constante réelle.

- (e) Comment évolue cette population lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Exercice 140** Loi de refroidissement de NEWTON (Solution)

Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement...) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité  $k$  dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considèrera constant).

On note  $T(t)$  la température de l'objet à l'instant  $t$ .

1. Donner l'équation différentielle dont est solution la fonction  $T$  si l'on suppose que le milieu ambiant est à température constante  $T_a$ .
2. Déterminer  $T(t)$  si l'objet possède une température initiale  $T(0) = T_0$ .
3. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps (par exemple le cas du sol exposé aux rayons du soleil). Déterminer  $T(t)$  lorsque  $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$ .

# Chapitre 12

## Solutions

**Solution 46.** ([Enoncé](#))

1. Soit  $h > 0$ , alors :

$$\frac{d(h) - d(0)}{h} = \frac{h^2 + 5h - 0}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h + 5)}{h} = 5 + h.$$

2. Par définition, la vitesse instantanée  $d'(0)$  est donnée par :

$$d'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h) - d(0)}{h},$$

on a donc :

$$d'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} 5 + h = 5.$$

3. On calcule d'abord pour  $h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d(10 + h) - d(10)}{h} &= \frac{(10 + h)^2 + 5(10 + h) - 10^2 - 5 \times 10}{h} \\ &= \frac{100 + 20h + h^2 + 50 + 5h - 100 - 50}{h} \\ &= \frac{h^2 + 25h}{h} \\ &= \frac{h(h + 25)}{h} \\ &= h + 25. \end{aligned}$$

On a par définition :

$$d'(10) = \lim_{h \rightarrow 10} \frac{d(10 + h) - d(10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 10} h + 25 = 25.$$

**Solution 47.** ([Enoncé](#))

Soit  $h > -1$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} &= \frac{\sqrt{1 + h} - \sqrt{1}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} \\ &= \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{1 + h} + 1}{\sqrt{1 + h} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{1 + h} - 1)(\sqrt{1 + h} + 1)}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{1 + h}^2 - 1^2}{h(\sqrt{1 + h} - 1)} \\ &= \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1 + h} - 1)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{1 + h} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + h} - 1}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité remarquable  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  à la ligne 5.

2. On a par définition

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}.$$

Or,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+h} = \sqrt{1+0} = 1$$

et donc finalement

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

**Solution 48.** (Enoncé)

a) La fonction  $f$  est un polynôme, donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 \times 1 + 0 = 2.$$

b) La fonction  $f$  est un polynôme, donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -4 \times 2x + \sqrt{2} \times 1 = -8x + \sqrt{2}.$$

c) La fonction  $x \mapsto 2\sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et la fonction  $x \mapsto 4x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc par somme, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4 \times 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4.$$

d) La fonction  $x \mapsto x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc par produit, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . La fonction  $f$  s'écrit  $u \times v$  avec :

$$u(x) = x \text{ et } v(x) = \sqrt{x},$$

donc par la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

où l'on a utilisé :

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

e) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par polynomiale. On pourrait dériver  $f$  en utilisant la formule du produit  $(uv)'$  avec :

$$u(x) = x^7 \text{ et } v(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

mais cela n'est pas le plus efficace. Il est préférable de développer  $f$  puis de dériver  $f$ . On a donc :

$$f(x) = 3x^{10} + 5x^8 + 2x^8 + x^7,$$

et donc finalement :

$$f'(x) = 30x^9 + 45x^7 + 16x^7 + 7x^6.$$

f) Les fonctions  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto x$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , donc par produit, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est de la forme  $uv$  avec :

$$u(x) = x^3 \text{ et } v(x) = x - \sqrt{x},$$

d'où :

$$u'(x) = 3x^2 \text{ et } v'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\
 &= 3x^2(x - \sqrt{x}) + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)x^3 \\
 &= 3x^3 - 3x^2\sqrt{x} + x^3 - \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \\
 &= 4x^3 - 3x^2\sqrt{x} - \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Il est possible de simplifier l'expression en utilisant le fait que  $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$  et en remarquant que :

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x \times x^2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times x^2}{x} = x^2\sqrt{x}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 3x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} \\
 &= 4x^3 - \left(3 + \frac{1}{2}\right)x^2\sqrt{x} \\
 &= 4x^3 - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

g) La fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et s'annule en  $-1$  et  $1$ , donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ . La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{1}{u}$  avec  $u(x) = x^2 - 1$ , on a donc pour  $x \neq 1$  et  $x \neq -1$  :

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

h) La fonction  $x \mapsto 2x^2 + 5x + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car polynomiale. La fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas, donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec :

$$u(x) = 2x^2 + 5x + 1 \text{ et } v(x) = x^2 + 1,$$

on a donc :

$$u'(x) = 4x + 5 \text{ et } v'(x) = 2x.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\
 &= \frac{(4x + 5)(x^2 + 1) - 2x(2x^2 + 5x + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4x^3 + 4x + 5x^2 + 5 - 4x^3 - 10x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{-5x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

i) La fonction  $x \mapsto 2\sqrt{x+1}$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car polynomiale et ne s'annule donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec :

$$u(x) = 2\sqrt{x+1} \text{ et } v(x) = x^2 + 1.$$

La fonction  $u$  est de la forme  $h(g(x))$  avec  $h(x) = 2\sqrt{x}$  et  $g(x) = x + 1$ , donc :

$$u'(x) = g'(x)h'(g(x)) = 1 \times \frac{2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} \times (x^2 + 1) - 2x \times 2\sqrt{x+1}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} \times (x^2 + 1) - 2x \times 2\sqrt{x+1}}{(x^2 + 1)^2} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \times (x^2 + 1) - 2x \times 2\sqrt{x+1}\right) \sqrt{x+1}}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x\sqrt{x+1}^2}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 4x(x+1)}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

**Solution 49. (Enoncé)**

Il s'agit dans chaque cas, de dériver la fonction  $t \mapsto x(t)$ . Dans toutes les questions de cet exercice, la fonction  $t \mapsto x(t)$  est un polynôme donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = v_0 \times 1 + 0 = v_0$$

b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = v_0 \times 1 - \frac{g}{2} \times 2t = v_0 - gt$$

c) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = a \times 1 - 0 = a$$

d) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = -a \times 1 + 0 = -a$$

e) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = -2 \times 2t + 5 = -4t + 5,$$

et donc :

$$x'(1) = -4 + 5 = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

f) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = -\frac{1}{3} \times 3t^2 + 4 \times 2t + 6 \times 1 = -t^2 + 8t + 6$$

et donc :

$$x'(2) = -4 + 16 + 6 = 18 \text{ m.s}^{-1}$$

g) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = 5 \times 3t^2 + 0 = 15t^2$$

et donc :

$$x'(4) = 15 \times 4 = 60 \text{ m.s}^{-1}$$

**Solution 50.** (Enoncé)

L'accélération est donnée par  $a(t) = v'(t)$ , on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t) = 2 \times 3t^2 - 3 \times 1 = 6t^2 - 3.$$

On cherche maintenant à savoir quand l'accélération sera maximale entre  $t = 5$  s et  $t = 10$  s. On va tracer le tableau de variation de la fonction  $t \mapsto a(t)$ . La fonction  $t \mapsto a(t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a'(t) = 12t,$$

on a donc :

$$a'(t) \geq 0 \iff 12t \geq 0 \iff t \geq 0.$$

On peut donc tracer le tableau de variation de la fonction  $t \mapsto a(t)$  :

|         |                |      |                |
|---------|----------------|------|----------------|
| $t$     | $-\infty$      | $0$  | $+\infty$      |
| $a'(t)$ | $-$            | $0$  | $+$            |
| $a(t)$  | $+\infty$<br>↘ | $-3$ | ↗<br>$+\infty$ |

On voit alors que  $t \mapsto a(t)$  est croissante sur  $[5; 10]$  et donc l'accélération est maximale pour  $t = 10$  s et vaut :

$$a(10) = 6 \times 10^2 - 3 = 597 \text{ m.s}^{-2}.$$

**Solution 51.** (Enoncé)

On suppose ici que la quantité  $B(v, p, z)$  est constante, que l'on va noter plus simplement  $B$  ici. De plus, l'altitude  $z$  est constante, on a donc :

$$\frac{p}{\rho} = B - \frac{v^2}{2} - gz,$$

soit encore :

$$p = B\rho - \rho \frac{v^2}{2} - \rho gz.$$

On en déduit bien que la pression est une fonction de  $v$ . On peut alors dériver la fonction  $v \mapsto p'(v)$  :

$$p'(v) = 0 - \rho \times 2v \times \frac{1}{2} - 0 = -\rho v,$$

et  $p'(v)$  est bien proportionnel à  $v$  (la constante de proportionnalité vaut  $-\rho$ ).

**Solution 52.** (Enoncé)

1. La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car polynomiale, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = -12x + 6.$$

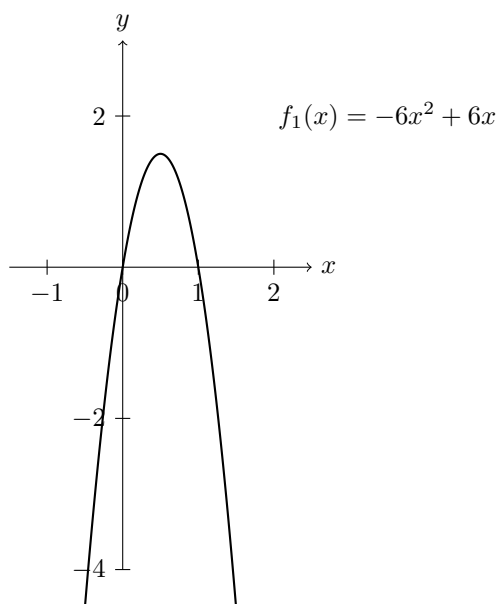
On a donc :

$$f_1'(x) \geq 0 \iff 6 \geq 12x \iff x \leq \frac{1}{2},$$

on peut en déduire le tableau de variation :

|         |                                                 |               |           |
|---------|-------------------------------------------------|---------------|-----------|
| $t$     | $-\infty$                                       | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | +                                               | 0             | -         |
| $f(t)$  | $-\infty \nearrow \frac{3}{2} \searrow -\infty$ |               |           |

et la représentation graphique :



**Solution 53.** (Enoncé)

1. a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont. La fonction  $x \mapsto 8x$  étant dérivable car polynomiale, et la fonction  $x \mapsto \frac{57800}{x}$  étant dérivable comme quotient de deux fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur  $]0; +\infty[$ . On a pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = 8 \times 1 + 57800 \times -\frac{1}{x^2} = 8 - \frac{57800}{x^2}.$$

b) On résout l'inégalité  $f'(x) \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$8 \geq \frac{57800}{x^2}.$$

On multiplie par  $x^2 \geq 0$  des deux côtés (le sens de l'inégalité est inchangé car on multiplie par un nombre positif) et on se retrouve avec :

$$8x^2 \geq 57800.$$

De même, on divise par 8 (le sens de l'inégalité ne change pas) et on obtient :

$$x^2 \geq 7225.$$

Enfin, on applique la fonction racine qui est croissante donc le sens de l'inégalité reste inchangé :

$$\sqrt{x^2} \geq 85,$$



or,  $\sqrt{x^2} = |x| = x$  car  $x \geq 0$  et donc  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si :

$$x \geq 85.$$

On peut donc tracer le tableau de variation de  $f$  :

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | 0         | 85   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | —         | 0    | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 1360 | $+\infty$ |

c) Il s'agit d'étudier le signe de  $f(x) - 8x$ , on a pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f(x) - 8x = \frac{57800}{x} > 0$$

donc la courbe de  $f$  est au-dessus de la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 8x$ .

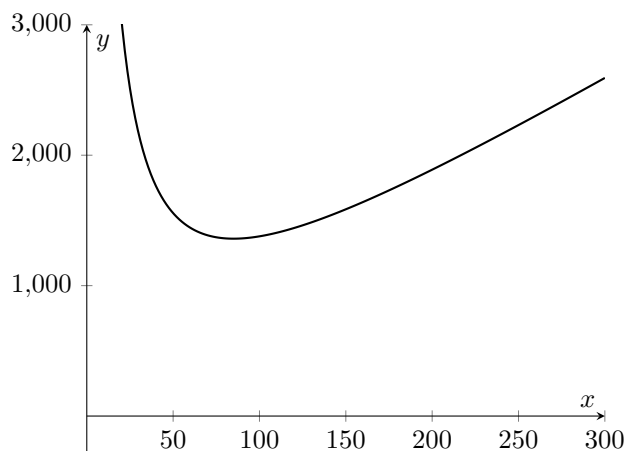
d) Pour faire le tracé de la fonction, on peut remarquer que pour  $x$  proche de zéro :

$$f(x) \approx \frac{57800}{x}$$

et donc tracer l'hyperbole  $x \mapsto \frac{57800}{x}$  pour  $x$  proche de 0. De même, pour  $x$  grand,

$$f(x) \approx 8x,$$

et donc tracer la droite  $y = 8x$  pour  $x$  grand. Enfin, on essaye de relier les deux courbes.



a) Le coût du transport est dû à la rémunération du chauffeur ainsi qu'au prix de l'essence. Le temps du trajet est donné par :

$$t = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{3400}{v}.$$

donc le coût du transport est donné par :

$$\begin{aligned}
 \text{coût}(v) &= \text{essence} + \text{salaire} \\
 &= 1,4 \times t \times \left( \frac{5}{2} + \frac{v^2}{595} \right) + 13,5 \times t \\
 &= 1,4 \times \frac{3400}{v} \times \left( \frac{5}{2} + \frac{v^2}{595} \right) + 13,5 \times \frac{3400}{v} \\
 &= \frac{11900}{v} + 8v + \frac{45900}{v} \\
 &= f(v)
 \end{aligned}$$

b) On cherche la vitesse pour la quelle  $f(v)$  est minimal, d'après le tableau de variation de la question 1/b), le coût est minimal pour  $v = 85$  km/h et vaut 1360 euros.

c) Il s'agit de résoudre :

$$f(v) \leq 1556,$$

soit encore :

$$8v + \frac{57800}{v} \leq 1556.$$

En multipliant par  $v > 0$  des deux côtés, cette inéquation est équivalente à :

$$8v^2 - 1556v + 57800 \leq 0. \quad (\star)$$

Les racines de  $8v^2 - 1556v + 57800$  sont données par

$$\frac{1556 - \sqrt{\Delta}}{16} \text{ et } \frac{1556 + \sqrt{\Delta}}{16}$$

avec  $\Delta = 1556^2 - 4 \times 8 \times 57800 = 571536$ . Les deux racines sont donc données par :

$$v_1 = 50 \text{ et } v_2 = \frac{289}{2} = 144,5.$$

Le trinôme  $8v^2 - 1556v + 57800$  a pour coefficient dominant  $8 > 0$ , donc est négatif entre ses racines, donc l'intervalle de solution de  $(\star)$  est :

$$[50; 144,5],$$

comme le camion ne peut aller au dessus de 90km/h, l'ensemble des vitesses recherchées sont celles entre 50 et 90 km/h.

#### **Solution 54.** (Enoncé)

En supposant  $V, M, R$  et  $T$  constantes, on obtient que la fonction  $m \mapsto \frac{m}{MV} RT$  est linéaire, de coefficient directeur :

$$\frac{RT}{MV}.$$

Sa représentation graphique est une droite dont la pente vaut  $\frac{RT}{MV}$ . Si l'on connaît  $V, M, T$ , on peut déterminer  $R$  à partir de la représentation graphique comme ceci :

- Déterminer la pente  $a$  de la droite.
- Utiliser la relation  $a = \frac{RT}{MV}$  pour en déduire  $R$ .

#### **Solution 55.** (Enoncé)

1. La fonction  $f$  est dérivable car polynomiale est sa dérivée est :

$$f'(x) = -3 \times x^2 + 4 \times 1 = -3x^2 + 4.$$

Pour étudier les variations de  $f$ , on résout l'inéquation  $f'(x) \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$3x^2 \leq 4,$$

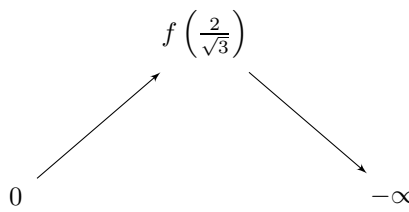
soit encore :

$$x^2 \leq \frac{4}{3}.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle :

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$

Comme on étudie  $f$  que pour  $x \geq 0$ , on ne trace le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$

|         |                                                                                    |                      |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------|
| $x$     | 0                                                                                  | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                  | 0                    | -         |
| $f(x)$  |  |                      |           |

2. La valeur maximale de  $f$  est donnée par  $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  soit encore :

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 4 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

3. a) Le théorème de Pythagore dans le triangle  $ABC$  donne :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

or  $AC = 2$  (deux fois le rayon du cercle),  $AB = l$  et  $BC = h$ , ce qui donne  $4 = h^2 + l^2$  et donc enfin :

$$h^2 = 4 - l^2.$$

b) Il suffit d'écrire en utilisant la question précédente :

$$l \times h^2 = l \times (4 - l^2) = 4l - l^3 = f(l).$$

c) La poutre résiste le plus à la flexion quand  $f$  est maximale, c'est-à-dire quand  $l = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Avec une telle valeur de  $l$ , on a :

$$h^2 = 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

donc

$$h = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

car  $h$  est positif (c'est une longueur).

d) Notons  $I$  le milieu de  $AD$ , alors on a :

$$OI = \frac{AB}{2} = \frac{l}{2}.$$

dans le triangle  $OIA$  rectangle en  $I$ , on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{OI}{OA} = \frac{l}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

donc l'angle  $\alpha$  vaut à  $0,1^\circ$  près :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7^\circ.$$

**Solution 56. (Enoncé)**

1. La fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x}$  est définie pour  $1-x \geq 0$  c'est-à-dire  $x \leq 1$  et est dérivable pour  $1-x > 0$  donc  $x < 1$ . Comme la fonction  $x \mapsto x$  est dérivable (donc continue) sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est donc définie sur  $] -\infty; 1]$  et dérivable sur  $] -\infty, 1[$ .

2. La fonction  $f$  est de la forme  $uv$  avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = \sqrt{1-x}$ . La fonction  $v$  est elle-même de la forme  $v(x) = h(g(x))$  avec  $h(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = 1-x$ . On en déduit donc que :

$$v'(x) = g'(x)h'(g(x)) = -1 \times \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}},$$

et finalement :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. Il s'agit de résoudre l'équation  $f'(x) \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$\sqrt{1-x} \geq \frac{x}{2\sqrt{1-x}},$$

soit encore en multipliant par  $\sqrt{1-x} \geq 0$  (sens de l'inégalité inchangé) :

$$\sqrt{1-x}^2 \geq \frac{x}{2},$$

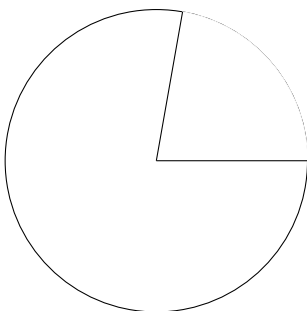
on utilise le fait que  $\sqrt{1-x}^2 = 1-x$  et l'on obtient :

$$1-x \geq \frac{x}{2}$$

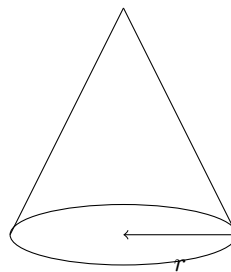
et donc  $x \leq \frac{2}{3}$ . Un tableau de variation montre facilement qu'en cette valeur  $f$  atteint son maximum et qu'il vaut :

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

4.



Disque de rayon  $R$



Cône (sans base)

5. Le théorème de Pythagore donne  $R^2 = r^2 + h^2$  soit encore :

$$h = \sqrt{R^2 - r^2},$$

car  $h \geq 0$  (c'est une longueur).

6. Le volume d'un cône est donné par :

$$V = \frac{\pi}{3} \times r^2 \times h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2},$$

et on vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{\pi R^3}{3} f\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) &= \frac{\pi R^3}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \\ &= \frac{\pi R}{3} r^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \\ &= V \end{aligned}$$

7. Le volume est maximal lorsque  $f$  est maximale, c'est-à-dire quand :

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

et donc

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

car  $\frac{r}{R} > 0$ .

**Solution 59.** ([Enoncé](#))

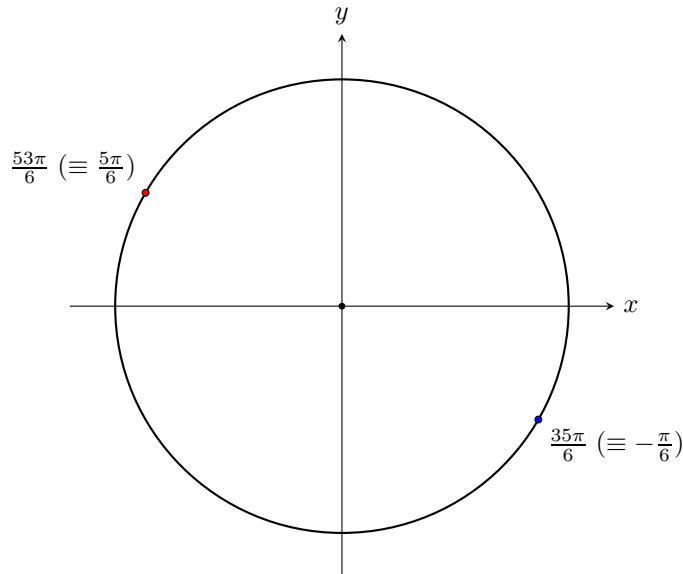
1. La mesure principale d'un angle est la mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ . Pour l'angle  $\frac{53\pi}{6}$ , cette mesure est strictement supérieure à  $\pi$ , on retranche donc  $2\pi$  jusqu'à que la mesure appartienne à l'intervalle  $] -\pi; \pi]$  :

$$\frac{53\pi}{6} \underset{-2\pi}{\rightsquigarrow} \frac{41\pi}{6} \underset{-2\pi}{\rightsquigarrow} \frac{29\pi}{6} \underset{-2\pi}{\rightsquigarrow} \frac{17\pi}{6} \underset{-2\pi}{\rightsquigarrow} \frac{5\pi}{6},$$

comme  $\frac{5\pi}{6}$  est dans l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ , on s'arrête ici et la mesure principale de  $\frac{53\pi}{6}$  est  $\frac{5\pi}{6}$ .

On trouve de même que la mesure principale de  $\frac{35\pi}{6}$  vaut  $-\frac{\pi}{6}$ .

2.



3. Un angle a même cosinus/sinus que sa mesure principale et donc :

$$\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Solution 60.** ([Enoncé](#))

1. On va utiliser la relation :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

On a alors :

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

On a donc finalement :

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{15}{16}} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{\frac{15}{16}}.$$

Pour déterminer laquelle des deux valeurs est la bonne, on utilise le fait que  $x$  appartient à l'intervalle

$$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right],$$

donc  $\sin(x) \leq 0$  et finalement :

$$\sin(x) = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

2. On utilise exactement le même raisonnement que précédemment. On a :

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

donc

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{8}{9}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{8}{9}}.$$

Or  $x$  est dans l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  donc  $\cos(x) \leq 0$  et :

$$\cos(x) = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**Solution 61.** ([Enoncé](#))

Pour résoudre cet exercice, il faut se rappeler que les solutions de l'équation  $\cos(x) = \cos(a)$  sont données par :

$$x = a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation  $\sin(x) = \sin(a)$  sont données par :

$$x = a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

a) On remarque que  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , donc l'équation devient  $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) On remarque que  $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , donc l'équation devient  $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) On remarque que  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , donc l'équation devient  $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et les solutions sont :

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) L'équation se met sous la forme :

$$2\sin(x) = -1,$$

soit encore

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}.$$

On remarque que  $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ , donc l'équation devient  $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$  et les solutions sont :

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) L'équation se met sous la forme :

$$2\cos(x) = -\sqrt{3},$$

soit encore

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On remarque que  $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ , donc l'équation devient  $\cos(x) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$  et les solutions sont :

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

f) Les solutions sont données par :

$$2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$2x = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \rightsquigarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightsquigarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

g) Les solutions sont données par :

$$3x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightsquigarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$3x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \rightsquigarrow x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Solution 62.** ([Énoncé](#))

1. On utilise les relations  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$  pour écrire :

$$\begin{aligned} A &= 2\sin(x) + \cos(x + \pi) + \cos(x) + \sin(-x) \\ &= 2\sin(x) - \cos(x) + \cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

On utilise les relations  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ ,  $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$  pour écrire :

$$\begin{aligned} B &= \sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) - 2\sin(-x) \\ &= -\sin(x) - \sin(x) + 2\sin(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On utilise les relations  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ , et  $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$  pour écrire :

$$\begin{aligned} C &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x + \pi) \\ &= \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. On remarque que :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} S &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Solution 63.** ([Énoncé](#))

1. On utilise les formules pour  $\cos(a + b)$  et  $\sin(a + b)$ .

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) &= \sin(x) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x). \end{aligned}$$

car

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$



2. On cherche  $r > 0$  et  $\alpha$  vérifiant :

$$r \cos(\alpha) = 1 \text{ et } r \sin(\alpha) = \sqrt{3}.$$

Pour un tel  $r$ , on a :

$$r^2 = r^2 \times 1 = r^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = (r \cos(\alpha))^2 + (r \sin(\alpha))^2 = 1 + 3 = 4,$$

et donc  $r = 2$  car  $r > 0$ . On cherche maintenant  $\alpha$  tel que :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

la valeur  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  convient. On a donc :

$$\begin{aligned} A &= \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) \\ &= 2 \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left( \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Pour mettre  $A$  sous la forme  $b)$ , on utilise la relation :

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

et l'on obtient :

$$A = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$