

**Questions et exercices sur la leçon 219 : Extremums :
existence, caractérisation, recherche. Exemples et
applications.**

LAURENT MONTAIGU

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Rappeler les conditions nécessaires/suffisantes sur la dérivée seconde/matrice Hessienne pour qu'un point critique soit un extremum local.
- Déterminer les extremums de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Voici un VRAI/FAUX, dans la suite, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} non trivial et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $x \in I$ tel que $f'(x) = 0$. La fonction f admet un extremum en x .
- Si f admet un extremum en $x \in I$, alors $f'(x) = 0$.
- Si $f'(x) = 0$ et $f''(x) \geq 0$, alors f admet un minimum local en x .
- Si f admet un minimum local en $x \in I$, alors $f''(x) \geq 0$.
- Si f admet un minimum local en $x \in I$, alors $f''(x) > 0$.
- Si f est convexe sur $I = \mathbb{R}$ et admet un extremum en deux points distincts alors f est constante.
- Si f est convexe sur \mathbb{R} . Alors f admet un extremum global.
- Si $f'' > 0$ sur I alors f est strictement convexe sur I .
- Si f est strictement convexe sur I alors $f'' > 0$ sur I .
- La fonction \cos admet un maximum global strict en $x = 0$.
- Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles. Si $d(A, B) = 0$ alors $A \cap B \neq \emptyset$.
- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et x un extremum local de f . Si $\det(\text{Hess}(f)(x)) \geq 0$ et $\text{tr}(\text{Hess}(f)(x)) \geq 0$, alors f admet un minimum local en x . Et si l'on remplace \geq par $>$?
- La somme de deux fonctions convexes est convexe.
- Le produit de deux fonctions convexes est convexe.
- Si f est convexe sur $[0; \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}; 1]$, alors f est convexe sur $[0; 1]$.

2 Exercices

Exercice 1

Soit I un intervalle ouvert non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que les minimums locaux de f sont globaux.
2. On suppose f dérivable. Soit $x \in I$ un point critique de f . Montrer que x est un minimum global de f .

Exercice 2

Etudier les extremums de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier et K_1, K_2 deux compacts non vide de \mathbb{R}^n . Montrer que la distance $d(K_1, K_2)$ est atteinte. Et si l'on remplace K_1 par un fermé quelconque ? Et si l'on remplace K_1 et K_2 par des fermés quelconques ?

Exercice 4

Etudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive *i.e.* $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne et l'on note D le disque unité ouvert. On définit le Laplacien de f par

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On suppose $\Delta(f) \geq 0$. Le but est de montrer que le maximum de f sur le disque unité fermé \overline{D} est atteint en un point du cercle unité. On pose pour $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$.

1. Justifier que $\max_{x \in \overline{D}} f_\varepsilon(x)$ est bien défini.
2. Montrer que $\Delta(f_\varepsilon) > 0$.
Soit $x_\varepsilon \in \overline{D}$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = \max_{x \in \overline{D}} f_\varepsilon(x)$.
3. On suppose que $x_\varepsilon \in D$, montrer que pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x_\varepsilon) \leq 0.$$

4. En déduire que $x_\varepsilon \in \partial D$.
5. Conclure dans le cas général.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Etudier les extremums de

$$f : x \mapsto \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$$

sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercice 8

Soit $c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles de limite nulle. Etudier les extremums locaux de la fonction f définie sur $c_0(\mathbb{N})$ par

$$\forall x = (x_n)_{n \geq 0}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(x_n)}{2^n}.$$

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)

1. Supposons que f admette un minimum local en $x_0 \in I$. Soit $x \in I$, on suppose $x > x_0$ et soit $t \in]0; 1[$. L'inégalité des 3 pentes donne

$$\frac{f((1-t)x_0 + tx) - f(x_0)}{(1-t)x_0 + tx - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

soit encore

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t(x - x_0)} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On multiplie par $x - x_0 > 0$ pour obtenir

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0).$$

Pour t assez proche de 0, le membre de gauche est positif car x_0 est un minimum local de f , on en déduit $f(x) \geq f(x_0)$. Si $x < x_0$, la démonstration est similaire.

2. La fonction f est convexe et dérivable donc au dessus de ses tangentes. En particulier, si $y \in I$, alors

$$f(y) \geq f'(x)(y - x) + f(x).$$

Comme $f'(x) = 0$, il vient $f(y) \geq f(x)$ et x est un minimum global de f .

Solution 2. (Enoncé)

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Pour trouver les extremums de f , on commence par étudier ses points critiques. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}.$$

Donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

On en déduit que x et y sont positifs et que $x^4 = x$ donc $x = 0$ ou $x = 1$. On vérifie alors que les seules solutions sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Pour déterminer la nature des points critiques, on peut déterminer la nature de la Hessienne en ces points. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\text{Hess}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

qui possède deux valeurs propres de non nulles de signes opposées, donc $(0, 0)$ est un point selle. Enfin,

$$\text{Hess}(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}),$$

donc $(1, 1)$ est un minimum local de f . Remarquons qu'il n'est pas global car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty.$$

Solution 3. (Enoncé)

On sait que

$$d(K_1, K_2) = \inf_{(x,y) \in K_1 \times K_2} \|x - y\|.$$

Soit $(x_n, y_n) \in K_1^{\mathbb{N}} \times K_2^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(K_1, K_2)$$

Comme $K_1 \times K_2$ est compact, on peut trouver une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $(x, y) \in K_1 \times K_2$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \text{ et } y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y.$$

On a alors

$$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x - y\|,$$

et donc $\|x - y\| = d(K_1, K_2)$ et la distance est atteinte.

Si l'on remplace K_1 par un fermé F_1 , le résultat tient toujours. En effet, en reprenant les notations précédentes, il suffit de voir que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée car

$$\forall n \geq 0, \quad \|x_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n\|$$

et les deux suites $(\|x_n - y_n\|)_n$ et $(\|y_n\|)_n$ sont bornées, la première étant convergente, la seconde étant à valeurs dans K_2 , ensemble borné car compact. On peut donc encore extraire une sous-suite convergente de $(x_n)_n$ (car l'on est en dimension finie), dont la limite sera dans F_1 car F_1 est fermé. On peut alors reproduire le raisonnement précédent.

Si l'on remplace K_1 et K_2 par deux fermés F_1 et F_2 , le résultat devient faux en prenant par exemple

$$F_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ et } F_2 = \{x, e^x \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

En effet, $d(F_1, F_2) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ mais la distance n'est pas atteinte car la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

Solution 4. (Enoncé)

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Pour trouver les extremums de f , on commence par étudier ses points critiques. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^2 - 4x \end{pmatrix}.$$

Donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^9 = y \end{cases}$$

Les solutions de $y^9 = y$ sont $y = -1$, $y = 0$ et $y = 1$. On vérifie ensuite que les seules solutions sont $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Pour déterminer la nature des points critiques, on peut déterminer la nature de la Hessienne en ces points. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\text{Hess}(f)(-1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}),$$

donc $(-1, -1)$ est un minimum local de f . La Hessienne en $(0, 0)$ vaut

$$\text{Hess}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

qui possède deux valeurs propres de non nulles de signes opposées, donc $(0, 0)$ est un point selle. Enfin, la Hessienne en $(1, 1)$ vaut

$$\text{Hess}(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}),$$

donc $(1, 1)$ est un minimum local de f .

Montrons enfin que les minimums locaux en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont globaux. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &= x^4 + y^4 - 4xy + 2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy \\ &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et cela conclut.

Solution 5. (Enoncé)

Comme f est coercive, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > R \implies f(x) \geq f(0).$$

On considère alors la boule fermée $\overline{B(0, R)}$ de centre 0 et de rayon R , elle est compacte car fermée et bornée en dimension finie. La fonction f étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists x \in \overline{B(0, R)}, \forall y \in \overline{B(0, R)}, \quad f(y) \geq f(x).$$

On a alors pour $y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|y\| > R$,

$$f(y) \geq f(0) \geq f(x),$$

et donc x est bien un minimum global de f .

Remarquons que le résultat est faux sans hypothèse de continuité, comme le montre le contre-exemple suivant

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution 6. (Enoncé)

1. La fonction f_ε est continue sur le compact \overline{D} donc est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence du maximum.

2. Par linéarité de l'opérateur Δ , il vient

$$\Delta(f_\varepsilon) = \Delta(f) + \varepsilon \Delta(\|\cdot\|^2).$$

Or pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{\partial^2(\|\cdot\|^2)}{\partial x_i^2} = 2$$

et donc

$$\Delta(f_\varepsilon) = \Delta(f) + 2n\varepsilon > 0.$$

3. La fonction f_ε admet un maximum local en $x_\varepsilon \in D$ qui est ouvert, donc la Hessienne de f_ε en x_ε est symétrique négative, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T \text{Hess}(f)(x_\varepsilon) X \leq 0.$$

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en prenant $X = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en position i , il vient

$$X^T \text{Hess}(f)(x_\varepsilon) X = \text{Hess}(f)(x_\varepsilon)[i, i] = \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x_\varepsilon) \leq 0$$

et cela conclut.

4. On a donc par la question précédente

$$\Delta(f_\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_j^2}(x_\varepsilon) \leq 0,$$

ce qui est contradictoire avec la question 2. On en déduit finalement : $x_\varepsilon \in \partial D$.

5. Soit $n \geq 1$, en utilisant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et la question précédente, il existe $x_n \in \partial D$ tel que

$$\forall x \in \overline{D}, \quad f_{\frac{1}{n}}(x) \leq f_{\frac{1}{n}}(x_n).$$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact ∂D , donc quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers $x^* \in \partial D$. En reprenant l'inégalité précédente il vient

$$\forall x \in \overline{D}, \quad f(x) + \frac{1}{n} \|x\|^2 \leq f(x_n) + \frac{1}{n} \|x_n\|^2,$$

en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ il vient

$$\forall x \in \overline{D}, \quad f(x) \leq f(x^*)$$

et donc le maximum de f sur \overline{D} est bien atteint en un point de ∂D .

Solution 7. (Enoncé)

Comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe des réels $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad Ae_i = \lambda_i e_i.$$

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

On a donc

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Finalement, le maximum de f est λ_n , atteint par exemple en $x = e_n$ et le minimum de f est λ_1 , atteint par exemple en $x = e_1$.

Solution 8. (Enoncé)

Commençons par une première remarque : il est immédiat de vérifier que

$$\forall x \in c_0(\mathbb{N}), \quad -2 \leq f(x) \leq 2.$$

Cherchons maintenant les extremums de f , commençons par regarder ses point critiques, et donc de calculer sa différentielle. Soit $x \in c_0(\mathbb{N})$ et $h \in c_0(\mathbb{N})$. On peut écrire pour $n \geq 0$

$$\cos(x_n + h_n) = \cos(x_n) - h_n \sin(x_n) + h_n \varepsilon(h_n),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. On a donc

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(x_n)}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x_n) h_n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n \varepsilon(h_n)}{2^n}.$$

Le second terme est linéaire en h , et le dernier terme vérifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n \varepsilon(h_n)}{2^n} \leq \|h\|_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon(h_n)|}{2^n} =: \|h\|_{\infty} \tilde{\varepsilon}(h).$$

Montrons que $\tilde{\varepsilon}(h) \rightarrow 0$ quand $\|h\|_{\infty} \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta; \delta[$, $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. On a alors pour $\|h\|_{\infty} < \delta$

$$|\tilde{\varepsilon}(h)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon(h_n)|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq 2\varepsilon$$

et cela conclut. On en déduit que f est différentiable en x et

$$\forall h = (h_n)_n \in c_0(\mathbb{N}), \quad df(x) \cdot h = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x_n) h_n}{2^n}.$$

Soit x un point critique de f , on a donc $df(x) \cdot h = 0$ pour tout $h \in c_0(\mathbb{N})$. En prenant $h = (\delta_{n,k})_n$ pour $k \in \mathbb{N}$ il vient

$$\frac{\sin(x_k)}{2^k} = 0$$

et donc $\sin(x_k) = 0$ et finalement

$$\exists l_k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = \pi l_k.$$

Comme la suite (x_k) doit tendre vers 0, cela implique nécessairement que la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang, que l'on va noter n_x . On a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n_x} \frac{\cos(x_k)}{2^k} + \sum_{k=n_x+1}^{\infty} \frac{\cos(x_k)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n_x} \frac{(-1)^{l_k}}{2^k} + \sum_{k=n_x+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

On va maintenant distinguer deux cas. Le premier étant l_k pair pour tout $k \geq 0$. On a alors dans ce cas

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n_x} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=n_x+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

et donc x est un maximum global de f . Supposons maintenant qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l_{k_0} soit impair et montrons que x n'est pas un extremum local. Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Posons $h_1 = x + \varepsilon(\delta_{n,k_0})_n$. On a alors

$$f(x + h_1) - f(x) = \frac{\cos(x_{k_0} + \varepsilon)}{2^{k_0}} - \frac{\cos(x_{k_0})}{2^{k_0}} = \frac{\cos(\pi l_{k_0} + \varepsilon)}{2^{k_0}} + \frac{1}{2^{k_0}} = \frac{-\cos(\varepsilon)}{2^{k_0}} + \frac{1}{2^{k_0}} > 0.$$

Posons maintenant $h_2 = x + \varepsilon(\delta_{n,n_x+1})_n$, alors

$$f(x + h_2) - f(x) = \frac{\cos(x_{n_x+1} + \varepsilon)}{2^{n_x+1}} - \frac{1}{2^{n_x+1}} = \frac{\cos(\varepsilon) - 1}{2^{n_x+1}} < 0.$$

On en déduit que x n'est pas un extremum local de f , car l'on a $\|x - h_1\|_{\infty} = \|x - h_2\|_{\infty} = \varepsilon$ et

$$f(x + h_1) > f(x) \text{ et } f(x + h_2) < f(x).$$