Questions et Exercices sur la leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Laurent Montaigu

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables. Il y a aussi des exercices. Le niveau de difficulté donné (de 1 à 5 étoiles) est subjectif.

Contents

1 Questions

Voici une liste de questions auxquels il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Dresser le tableau des primitives usuelles ($\cos, \sin, \ln, \dots$).
- Enoncer les règles de Bioche.
- Rappeler la méthode pour intégrer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}, \frac{dx+e}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$.
- Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est-t-elle convergente ? Et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$?
- Pour quels couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est-t-elle convergente ?
- Calculer $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n\,\mathrm{d}x$.
- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. (Bonus : donner sa valeur).
- Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de f est bien définie, est continue, et qu'elle tend vers 0 quand $\|\xi\| \to +\infty$.
- Donner la définition de la fonction Γ d'Euler, montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et donner la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$.
- Calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

et un VRAI/FAUX :

- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- La fonction $\ln$ est intégrable sur $[0,1]$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Le produit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Si f est intégrable sur $[0,1]$, alors f^2 aussi.
- Si f^2 est intégrable sur $[0,1]$, alors f aussi.
- Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2 Exercices

Exercice 1 ★☆☆☆☆ (Solution)
Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int e^{3x}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad 2. \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}, \quad 3. \int \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 ★☆☆☆☆ (Solution)
Montrer la convergence et calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 ★★☆☆☆ (Solution)
Montrer que :

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

On remarquera que pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\frac{x-1}{\ln(x)} = \int_0^1 x^y \mathrm{d}y$.

Exercice 4 ★★☆☆☆ (Solution)
Calculer pour $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

On cherchera une relation de récurrence vérifiée par $(I_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 ★★☆☆☆ (Solution)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 6 ★★☆☆☆ (Solution)

Le but de cet exercice est de calculer de deux manières l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$, en déduire I par la formule de Fourier-Plancherel.
3. Retrouver ce résultat en montrant que $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ en faisant une intégration par parties, on utilisera ensuite le résultat de l'exercice 12.

Exercice 7 ★★☆☆☆ (Solution)

Le but de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$. On note $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que $I = J$.
3. En calculant de deux manières $I + J$, déterminer I.
4. ★★★★☆ Retrouver ce résultat en passant par des sommes de Riemann. (On introduira le polynôme $P = (X+1)^{2n} - 1$).

Exercice 8 ★★☆☆☆ (Solution)
Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 *Contre-exemple au théorème de* FUBINI ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$. Que remarquez-vous ?

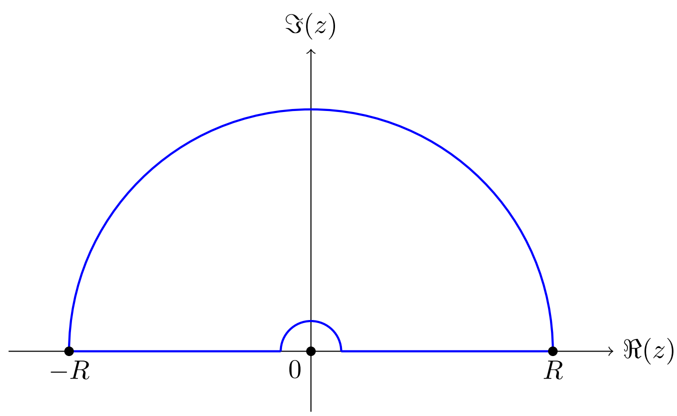
Exercice 10 *Contre-exemple au théorème de* FUBINI *2* ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1], \quad f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$. Que remarquez-vous ?
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.

Exercice 11 ★★★☆☆ (Solution)
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée et réduite. Déterminer la loi de $\frac{Y}{X}$.

Exercice 12 *Intégrale de Dirichlet* ★★★☆☆ (Solution)
Montrer la convergence et calculer $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. On pourra appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ au contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ formé des segments $[\varepsilon, R]$, $[-R, -\varepsilon]$ et des demi-cercles supérieurs de centre 0 et de rayon R et ε.



Exercice 13 ★★★☆☆ (Solution)
Soit (a,b) deux réels strictement positifs montrer la convergence et calculer $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$.
On introduira une fonction F telle que $I(a,b) = \frac{1}{a}F((ab)^2)$.

Exercice 14 ★★★☆☆ (Solution)
Le but de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est bien définie. On fera un développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. En simplifiant $\displaystyle\int_0^X \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$, calculer I. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 12.

Exercice 15 ★★★☆☆ (Solution)

En utilisant la formule de Fourier-Plancherel, montrer que pour $x > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\Gamma(x+iy)|^2 \mathrm{d}y = \frac{2\pi}{2^{2x}}\Gamma(2x)$.
On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$ par : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 ★★★★☆ (Solution)

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\|x\|\leq 1} \frac{\mathrm{d}x}{\|x\|^\alpha}$ converge ?
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\|x\|\geq 1} \frac{\mathrm{d}x}{\|x\|^\alpha}$ converge ?

où $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.
On fera un changement de coordonnées hypersphériques.

Exercice 17 ★★★★☆ (Solution)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

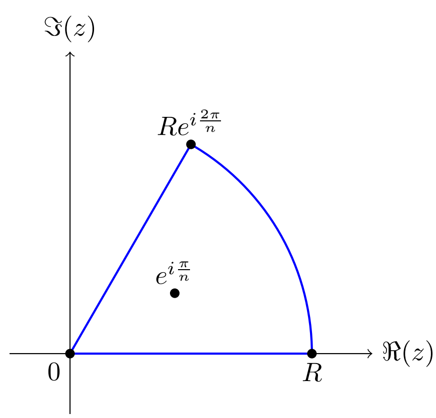
Exercice 18 ★★★★☆ (Solution)

Soit $n \geq 2$, montrer que :

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

On considèrera la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$, que l'on intégrera sur le bord du compact :

$$K = \left\{ re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} \right\}.$$



Exercice 19 ★★★★★ (Solution)

En vous inspirant de l'exercice 18, déterminer les couples $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale suivante converge,

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\beta + 1}\,\mathrm{d}x,$$

et la calculer.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)
1. On commence par linéariser $\cos^2$ et on écrit $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Il vient alors :

$$\int e^{3x}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{6} + \frac{1}{2}\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$, on peut faire deux intégrations par parties ou alors passer par les complexes :

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \Re\left(\int e^{(3+2i)x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \Re\left(\frac{e^{3+2i}x}{3+2i} + C\right)\\ &= \frac{e^{3x}}{13}(3\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C,\end{aligned}$$

d'où :

$$\int e^{3x}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{6} + \frac{e^{3x}}{26}(3\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C.$$

2. Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est strictement négatif, on le met alors sous forme canonique en complétant le carré :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + C,$$

où l'on a utilisé le résultat "bien connu" :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-b)^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

3. Les règles de Bioche nous invitent à poser $u = \cos(x)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u\\ &= -2\left(\int \frac{u+1}{u+1}\mathrm{d}u - \int\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u\right)\\ &= -2u + 2\ln(u+1) + C\\ &= -2\cos(x) + 2\ln(\cos(x)+1) + C,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ au début.

Solution 2. (Enoncé)
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$. De plus,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x),$$

et comme ln est intégrable sur $[0,1]$, l'intégrale I est bien définie. Pour la calculer, on va faire un développement en série entière et écrire pour $x \in]0,1[$, $\frac{1}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Et donc :

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -\ln(x)x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 -\ln(x)x^n\,\mathrm{d}x,$$

où l'interversion est justifiée par positivité. Or une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 \ln(x)x^n = \left[\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc finalement,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution 3. (Enoncé)
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$. De plus,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{\ln(x)},$$

et comme $\frac{1}{\ln}$ est intégrable sur $[0, \frac{1}{2}]$ (cette fonction se prolonge en une fonction continue sur cet intervalle), l'intégrale I est bien définie.
Soit $x \in]0,1[$, une primitive de $y \mapsto x^y = \exp(y\ln(x))$ est donnée par

$$y \mapsto \frac{1}{\ln(x)} \exp(y\ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} x^y.$$

On a donc immédiatement,

$$\int_0^1 x^y \mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln(x)}\right]_0^1 = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

On a alors :

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 x^y \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^1 \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = [\ln(y+1)]_0^1 = \ln(2).$$

L'interversion des deux intégrales étant justifiée par le théorème de Fubini-Tonelli.

Solution 4. (Enoncé)
On va cherche une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par $(I_n)_{n\geq 0}$. Soit $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x) - 1) \tan(x)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(x)^2) \tan^n(x) \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\tan(x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\
&= \frac{1}{n+1} - I_n.
\end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \geq 0, \quad I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$$

et,

$$\forall n \geq 0, \quad I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Solution 5. (Enoncé)
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement positive, on peut donc légitimement définir la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par $v_n = \ln(u_n)$.
On a alors :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{1}{n} (\ln((2n)!) - n\ln(n) - \ln(n!)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k),$$

donc,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln(n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ étant continue sur $[0,1]$, le théorème des sommes de RIEMANN assure que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)-(x+1)]_0^1 = 2\ln(2)-1.$$

Et donc,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{e}.$$

Solution 6. (Enoncé)
1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=1$. De plus,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc par comparaison, $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et I est bien définie.
2. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, si $\xi = 0$, alors $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(0) = \int_{-1}^1 \,\mathrm{d}x = 2$. Sinon :

$$\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi}\right]_{-1}^1 = \frac{e^{-2i\pi\xi}-e^{2i\pi\xi}}{-2i\pi\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Formule encore valable par continuité en $\xi = 0$. La formule de FOURIER-PLANCHEREL est (avec cette convention de la transformée de FOURIER) :

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)^2\,\mathrm{d}x = 2.$$

Ce qui après changement de variable donne :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $X > \varepsilon > 0$, alors en faisant une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\sin(x)^2}{x}\right]_\varepsilon^X + 2\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui en faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ donne :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

où dans la dernière intégrale on a fait le changement de variable $u = 2x$. L'exercice 12 permet alors de conclure :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : La fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ est l'exemple classique d'une fonction bornée dont la transformée de FOURIER n'est pas intégrable, il est bon de le retenir.

Solution 7. (Enoncé)
1. La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $]0,1]$, de plus :

$$f(x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$$

et comme ln intégrable sur $[0,1]$, f est intégrable sur $[0,1]$ et I est bien définie.
2. Il suffit de faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans I :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-1)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u = J.$$

3. La première manière est de dire que $I + J = 2I$. Pour la seconde on écrit :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x.$$

Or, le changement de variable $u = 2x$ donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \frac{I}{2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

Et le changement de variable $x = u - \frac{\pi}{2}$ montre que cette dernière intégrale vaut $J = I$. On a donc $2I = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I$ soit :

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

4. Comme la fonction f est intégrable et croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale de f est limite des sommes de Riemann *i.e.* :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\right).$$

Calculons donc $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, le changement de variable $k' = 2n - k$ donne :

$$a_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Donc $a_n = \sqrt{b_n}$ avec :

$$b_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0.$$

Pour calculer b_n, on introduit le polynôme $P = (X+1)^{2n} - 1$, ses racines sont les :

$$z_k = e^{\frac{i\pi k}{n}} - 1, \quad k \in [\![0; 2n-1]\!].$$

D'une part,

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{i\pi k}{2n}} = (2i)^{2n-1} b_n e^{\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{i\pi k}{2n}} = -2^{2n-1} b_n.$$

D'autre part, $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines non nulles de P, en factorisant P, on voit que ce produit vaut donc le coefficient constant de $(-1)^{2n-1}\frac{P}{X}$ d'où :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$$

donc :

$$b_n = 2n2^{1-2n}.$$

Donc finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\ln(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4n}\ln(b_n) = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Solution 8. (Enoncé)
La décomposition en élément simple de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

en multipliant par $X+1$ et en évaluant en -1 il vient : $a=\frac{1}{3}$. En multipliant par X et en regardant en $+\infty$ il vient $b=-a=-\frac{1}{3}$. Enfin, en évaluant en $X=0$ il vient $c=1-a=\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Solution 9. (Enoncé)
Soit $x \in]0,1[$, alors en écrivant :

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)}$$

on reconnait la dérivée de $y \mapsto \frac{y}{x^2+y^2}$ donc ,

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $f(x,y) = -f(y,x)$, il vient :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

On voit donc que $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$. Cela ne contredit pas le théorème de Fubini car :

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y + \int_{y=x}^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $f \notin L^1(]0,1[^2)$.

Solution 10. (Enoncé)
Soit $x > 0$, alors :

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2xe^{-xy}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 e^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

On a donc :

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x \underset{t=e^{-x}}{=} \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2),$$

par le résultat de l'exercice 3. Soit maintenant $y \in]0,1[$, alors :

$$\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 2e^{-2xy}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 0.$$

Donc,

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = 0.$$

On voit donc que $\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$. Cela ne contredit pas le théorème de Fubini car :

$$\int_0^1 \int_0^\infty |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y} = +\infty.$$

Solution 11. (Enoncé)
Soit h une fonction mesurable bornée, alors par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y}{X}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{y}{x}\right) f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Comme X et Y sont de loi normales centrées réduites et indépendantes, il vient :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y}{X}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On fait un changement de coordonnées polaires en écrivant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, il vient alors :

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y}{X}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} h(\tan(\theta))e^{-\frac{r^2}{2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\tan(\theta))\mathrm{d}\theta.$$

Par π-périodicité de tan, il vient :

$$\int_0^{2\pi} h(\tan(\theta))\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(\tan(\theta)) \underset{u=\tan(\theta)}{=} 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y}{X}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

On en déduit que $\frac{Y}{X}$ suit une loi de Cauchy.

Solution 12. (Enoncé)
La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$, donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Soit maintenant $X > 1$, par intégration par parties il vient :

$$\int_1^X \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

comme $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, il en va de même pour I.
Pour calculer I, on applique le théorème des résidus au contour de l'énoncé, le seul pôle de f est en 0 et 0 n'est pas dans l'intérieur du contour, le théorème des résidus donne alors :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0. \tag{$\star$}$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 4 morceaux :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\,\mathrm{d}t$$

or,

$$\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{2i\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0, R\to+\infty}{\longrightarrow} 2i\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Il reste à étudier les intégrales $\int_0^\pi e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t$, on utilise pour cela le théorème de convergence dominée. Soit $t \in]0,\pi[$, alors :

$$\left|e^{iRe^{it}}\right| = \left|e^{iR\cos(t) - R\sin(t)}\right| = e^{-R\sin(t)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\left|e^{iRe^{it}}\right| = e^{-R\sin(t)} \le 1 \in L^1(]0,\pi[)$. Donc,

$$\int_0^\pi e^{iRe^{it}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même,

$$\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \pi.$$

Donc en passant à la limite $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$ dans ($\star$) il vient,

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x - i\pi = 0,$$

soit encore :

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 13. (Enoncé)
La fonction $f_{(a,b)} : x \mapsto e^{a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = 0$. De plus $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$ donc $I(a,b)$ converge.
On a :

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-a^2t^2 - \frac{b^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{x=at}{=} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{(ab)^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F((ab)^2).$$

où $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x,t)\,\mathrm{d}x$. Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a > 0$ et $K_a = [a; +\infty[$:

- $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{1}{x^2}e^{x^2 - \frac{t}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K_a.
- Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times K_a$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \le \dfrac{e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}}}{x^2}$.

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K_a pour tout $a>0$ et donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus pour $t>0$:

$$F'(t) = \int_0^\infty -\frac{e^{-x^2-\frac{t}{x^2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x \underset{u=\frac{1}{x}}{=} -\int_0^\infty e^{-\frac{1}{u^2}-tu^2}\mathrm{d}u \underset{x=\sqrt{t}u}{=} -\frac{F(t)}{\sqrt{t}}.$$

Il existe donc $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t>0$, $F(t)=Ce^{-2\sqrt{t}}$. En prenant la limite quand $t\to 0^+$ (possible car F continue sur $\mathbb{R}^+$), on obtient $C=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc le résultat suivant :

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}.$$

Solution 14. (Enoncé)
1. La fonction $x\mapsto \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, il reste à étudier le comportement de f en $+\infty$. On fait pour cela on fait deux intégrations par parties (impropres) successives :

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\cos(x)}{x} - \left[\frac{\sin(t)}{t^2}\right]_x^\infty - 2\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} - 2\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On peut majorer la dernière intégrale de la façon suivante :

$$2\left|\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Donc,

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (se prouve en faisant une intégration par parties comme l'intégrale de Dirichlet), on en déduit enfin que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, par somme d'intégrales convergentes.
2. Soit $X>0$, alors,

$$\int_0^X\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^X\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}X - \int_0^X\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

On utilise le théorème de Fubini dans la dernière intégrale pour écrire :

$$\int_{x=0}^X\int_{t=0}^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \iint_{0\leq t\leq x\leq X} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^X\int_{x=t}^X \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^X (X-t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Donc,

$$\int_0^X\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}X - X\left(\frac{\pi}{2} - f(X)\right) + 1 - \cos(X) = Xf(X) - \cos(X) + 1.$$

Donc en passant à la limite $X\to+\infty$ et en utilisant 1. il vient :

$$\int_0^\infty\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Solution 15. (Enoncé)
Le but est de faire apparaître la fonction $y \mapsto \Gamma(x+iy)$ comme une transformée de FOURIER. On a par définition :

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty t^{x+iy-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

On fait ensuite le changement de variable $u = \ln(t)$, il vient alors :

$$\Gamma(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x+iy-1)} e^{-e^u} e^u \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^u+ux} e^{\frac{2\pi i y u}{2\pi}} \mathrm{d}u.$$

On peut donc écrire $\Gamma(x+iy) = \hat{f}\left(-\frac{y}{2\pi}\right)$ avec $f(u) = e^{-e^u+ux}$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. La formule de FOURIER-PLANCHEREL donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x+iy)|^2 \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}\left(-\frac{y}{2\pi}\right)\right|^2 \mathrm{d}y = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2e^u+2ux} \mathrm{d}u.$$

Le changement de variable $u = \ln(t)$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x+iy)|^2 \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^\infty e^{-2t} t^{2x-1}\, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{2^{2x}} \Gamma(2x).$$

Solution 16. (Enoncé)
On fait dans les deux intégrales le changement de coordonnées "hypersphériques" et on pose :

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\theta_1) \\
x_2 &= r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\
x_3 &= r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\
x_n &= r\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1}).
\end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\int_{\|x\|\leq 1} \frac{\mathrm{d}x}{\|x\|^\alpha} = \int_0^1 \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} f(\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_{n-1}.$$

où la fonction f est continue sur $[0,\pi]^{n-1} \times [0,2\pi]$. Il s'en suit que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < n$. De même, l'autre intégrale converge si et seulement si $\alpha > n$.

Solution 17. (Enoncé)
La matrice A est réelle symétrique définie positive, donc est diagonalisable en base orthonormée : il existe $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et des réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ strictement positifs tels que $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. On va maintenant faire un changement de variable dans l'intégrale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $(e_1,\dots,e_n)$, comme P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, la matrice P est orthogonale. L'application $\varphi : x \mapsto Px$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donc d'après la formule du changement de variable multi-dimensionnel :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\varphi(x),\varphi(x)\rangle} |\det \mathrm{Jac}(\varphi(x))|\, \mathrm{d}x.$$

Or, $\mathrm{Jac}(\varphi(x)) = P$ donc $|\det \mathrm{Jac}(\varphi(x))| = 1$. En notant $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\varphi(x),\varphi(x)\rangle}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

ce qui en utilisant le théorème de FUBINI-TONELLI et la valeur de l'intégrale de GAUSS :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{d}x = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i x_i^2}\, \mathrm{d}x_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\pi}\lambda_i^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Solution 18. (Enoncé)
L'intégrale est trivialement convergente. Pour la calculer, on applique le théorème des résidus à la fonction f au contour de l'énoncé. La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $e^{\frac{i\pi}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0; n-1]\!]$. Le seul résidu à l'intérieur du contour est $e^{\frac{i\pi}{n}}$. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\partial K} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{n}}\right). \qquad (\star)$$

Comme c'est un pôle simple, le résidu est simple à calculer :

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{n}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{n}}}{1 + z^n} = \frac{1}{n(e^{i\frac{\pi}{n}})^{n-1}} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}.$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 3 morceaux :

$$\int_{\partial K} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}}\,\mathrm{d}t + \int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{n}})^n}\,\mathrm{d}x.$$

On a,

$$\int_0^R \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I$$

et,

$$\int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{n}})^n}\,\mathrm{d}x = -\int_0^R \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{\frac{2i\pi}{n}} I.$$

On montre enfin que la dernière intégrale tend vers 0, en effet, pour $R > 1$:

$$\left|\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{|R^n e^{int} - 1|}\,\mathrm{d}t \leq \frac{R}{R^n - 1}\frac{2\pi}{n} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $n \geq 2$. En passant à la limite dans ($\star$) il vient :

$$\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right) I = -\frac{1}{n} 2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}},$$

ce qui donne finalement,

$$I = \frac{1}{n}\frac{2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}}}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Solution 19. (Enoncé)
La fonction $x \mapsto \dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus :

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^\alpha,$$

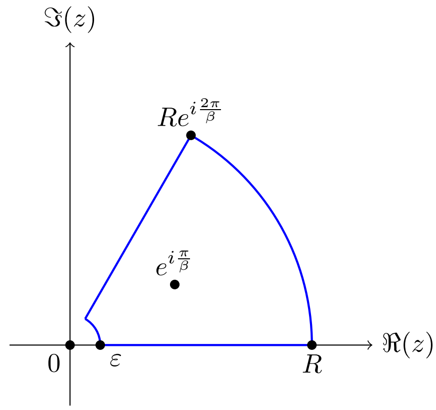
donc $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > -1$. De plus,

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \underset{x\to +\infty}{\sim} x^{\alpha-\beta},$$

donc $\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > \alpha+1$. Ainsi $I(\alpha,\beta)$ converge si et seulement si $\beta > \alpha+1 > 0$. On considère Log la détermination principale du logarithme complexe sur $U = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et l'on définit f sur U par :

$$\forall z \in U, \quad f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^\beta},$$

avec $z^\alpha = \exp(\alpha \mathrm{Log}(z))$ et $z^\beta = \exp(\beta \mathrm{Log}(z))$. La fonction f est méromorphe sur U, on va utiliser le théorème des résidus sur le contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ suivant :



Le seul pôle de f à l'intérieur du contour est en $e^{i\frac{\pi}{\beta}}$. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{\beta}}\right). \tag{$\star$}$$

Comme c'est un pôle simple, le résidu est simple à calculer :

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{\beta}}\right) = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{\beta}}} \frac{(z - e^{\frac{i\pi}{\beta}})z^\alpha}{1+z^\beta} = \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{\beta}}}{\beta(e^{i\frac{\pi}{\beta}})^{\beta-1}} = -\frac{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{\beta}}}{\beta}.$$

On a bien $(e^{\frac{i\pi}{\beta}})^\alpha = e^{\frac{i\pi\alpha}{\beta}}$ car :

$$(e^{\frac{i\pi}{\beta}})^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(e^{\frac{i\pi}{\beta}})) = \exp\left(\alpha\frac{i\pi}{\beta}\right).$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 4 morceaux :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{iRe^{it}(Re^{it})^\alpha}{1+R^\beta e^{i\beta t}}\,\mathrm{d}t + \int_R^\varepsilon \frac{e^{\frac{2i\pi}{\beta}}(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\alpha x^\alpha}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\beta}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{\beta}}^0 \frac{i\varepsilon e^{it}(\varepsilon e^{it})^\alpha}{1+\varepsilon^\beta e^{i\beta t}}\,\mathrm{d}t.$$

On a,

$$\int_0^R \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I(\alpha,\beta)$$

et,

$$\int_R^\varepsilon \frac{(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^{\alpha+1}x^\alpha}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\beta} = -\int_\varepsilon^R \frac{(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^{\alpha+1}x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}} I(\alpha,\beta).$$

On montre enfin que les deux dernières intégrales tendent vers 0, en effet, pour $R > 1$:

$$\left|\int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{iRe^{it}(Re^{it})^\alpha}{1+R^\beta e^{i\beta t}}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{R^{\alpha+1}}{|R^\beta e^{i\beta t}-1|}\,\mathrm{d}t \le \frac{R^{\alpha+1}}{R^\beta - 1}\frac{2\pi}{\beta} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\beta - \alpha - 1 > 0$. De même,

$$\left|\int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{i\varepsilon e^{it}(\varepsilon e^{it})^\alpha}{1+\varepsilon^\beta e^{i\beta t}}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{|1-\varepsilon^\beta e^{i\beta t}|}\,\mathrm{d}t \le 2\varepsilon^{\alpha+1}\frac{2\pi}{\beta} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

car $\alpha + 1 > 0$. En passant à la limite $\varepsilon \to 0^+$ et $R \to +\infty$ dans ($\star$) il vient :

$$I(\alpha,\beta)\left(1 - e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}}\right) = -\frac{1}{\beta}2i\pi e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{\beta}},$$

ce qui donne finalement,

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\frac{2i\pi e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{\beta}}}{e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}}-1} = \frac{\pi}{\beta\sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{\beta}\right)}.$$

<u>Remarque</u> : En faisant le changement de variable $u = x^{\alpha+1}$ dans $I(\alpha,\beta)$, il vient :

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}u^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}{1+u^{\frac{\beta}{\alpha+1}}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha+1}I\left(0,\frac{\beta}{\alpha+1}\right).$$

On pouvait alors supposer $\alpha = 0$ et utiliser le contour de l'exercice 18 (avec $n = \frac{\beta}{\alpha+1}$) pour calculer $I\left(0,\frac{\beta}{\alpha+1}\right)$.
<u>Remarque</u> On a pas en règle générale $(zz')^\alpha = z^\alpha z'^\alpha$ ou $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$, il faut y être attentif même si ici tout se passe bien.