Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

TD 2. Équations de transport

Exercice 1. L'équation de Liouville est une équation hyperbolique dite *cinétique*, qui décrit l'évolution d'une fonction de distribution $f(x, v, t)$, où $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction positive représente une densité de particules à l'instant t, au point de l'espace x, ayant la vitesse v. L'équation de Liouville s'écrit comme une équation de transport dans l'espace $(x, v) \in \mathbb{R}^2$ de dimension 2 appelé *espace des phases* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v\dfrac{\partial f}{\partial x} + E(x,t)\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 & \text{pour } t > 0, \quad (x,v) \in \mathbb{R}^2, \\ f(x,v,0) = f_0(x,v) & \text{pour } (x,v) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Dans cette équation, le champ de forces $E(x, t)$ est une fonction donnée, supposée bornée, de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et vérifiant la condition de Lipschitz :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |E(x,t) - E(y,t)| \leqslant L|x - y|, \tag{2}$$

où L est une constante strictement positive. Par ailleurs, la donnée initiale f_0 est une fonction positive à support compact et de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

1. En reprenant les définitions du cours, on note les courbes caractéristiques
$$s \mapsto (X(s; x, v, t), V(s; x, v, t)).$$
Écrire les deux équations différentielles définissant les courbes caractéristiques du système.
2. Montrer que (1) admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de f_0, $X(0; x, v, t)$ et $V(0; x, v, t)$. En déduire que la solution de (1) vérifie
$$\forall (x,v,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \qquad f(x,v,t) \geqslant 0.$$
Sans faire aucun calcul, expliquer brièvement pourquoi, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $(x, v) \mapsto f(x, v, t)$ est à support compact.
3. On note $J(s; x, v, t)$ le Jacobien de la transformation suivante, définie à s et t fixés :
$$(x,v) \mapsto (X(s;x,v,t), V(s;x,v,t)).$$
Démontrer que $J(s; x, v, t) \equiv 1$. (*Indication :* exprimer J en fonction de $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial v}$, puis calculer $\frac{\partial J}{\partial s}$ en raisonnant à t fixé).
4. La masse totale du système s'écrit
$$m(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v,t)\,dx\,dv. \tag{3}$$
En utilisant l'expression de f, transformer cette formule. Puis, en effectuant un changement de variable ad hoc, démontrer que la masse totale est constante au cours du temps :
$$m(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x,v)\,dx\,dv.$$

On suppose désormais que le champ de forces dérive d'un potentiel donné et indépendant du temps $\Phi(x)$. Cette hypothèse s'écrit $E(x,t) = -\Phi'(x)$.

5. Vérifier que la quantité $\frac{v^2}{2} + \Phi(x)$ est constante le long des caractéristiques, c'est-à-dire que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{(V(s;x,v,t))^2}{2} + \Phi(X(s;x,v,t))\right) = 0.$$

On définit l'énergie totale du système par

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi(x)\right) f(x,v,t)\, dx\, dv. \tag{4}$$

Montrer que l'énergie totale du système est conservée au cours du temps.

6. En dérivant les formules (3) et (4) par rapport au temps et en utilisant (1), retrouver de manière directe la conservation de la masse et de l'énergie.

Exercice 2. La fonction $u(x,t)$ désigne une densité d'individus d'âge $x \geqslant 0$, à l'instant $t \geqslant 0$. Le taux de mortalité est noté $d(x)$ et les individus peuvent donner naissance à des nouveaux-nés avec un taux de fécondité $b(x)$. Le modèle dit de renouvellement s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + d(x)u(x,t) = 0, \\ u(x=0,t) = \displaystyle\int_{y=0}^{+\infty} b(y)u(y,t)dy, \\ u(x,t=0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5}$$

On suppose que b est de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ et à support compact et, pour simplifier, on suppose que $d(x)$ est une fonction constante, égale à $d \in \mathbb{R}$.

1. Pour $x > t$, exprimer $u(x,t)$ en fonction de u_0.
2. Pour $x < t$, exprimer $u(x,t)$ à l'aide de la fonction

$$B(t) = \int_{y=0}^{+\infty} b(y)u(y,t)dy.$$

3. Trouver une relation du type

$$B(t) = \int_0^t K(t,s)B(s)ds + H(t) \qquad \text{(équation de Volterra)}.$$

4. On fixe $T > 0$ et on définit l'application F suivante :

$$\begin{array}{rcl} C^0([0,T]) & \to & C^0([0,T]) \\ B & \mapsto & F(B)(t) = \displaystyle\int_0^t K(t,s)B(s)ds + H(t). \end{array}$$

Démontrer que si T est inférieur à une constante ne dépendant que de b et d, l'application F est strictement contractante. En déduire l'existence d'une unique solution pour l'équation de Volterra sur $[0,T]$. Montrer ensuite que cette solution existe pour tout temps.

5. En déduire l'existence d'une unique solution faible u pour (5). Cette solution est-elle continue ? Est-elle C^1 ?