Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

# TD 3. Loi de conservation non linéaire

**Exercice 1.** On considère l'équation non linéaire suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0, \\ &u(0,x) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $s \mapsto f'(s)$ est une fonction strictement croissante. L'inconnue $u$ est une fonction à valeurs réelles.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
   (a) Adapter la méthode des caractéristiques à ce régime non linéaire et démontrer que les caractéristiques sont alors toutes des droites.
   (b) On suppose la donnée initiale $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ croissante. Démontrer à l'aide de la question précédente que (1) admet effectivement une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
   (c) On suppose à présent la donnée initiale $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ non croissante. Démontrer qu'il existe un temps $T > 0$ tel qu'il n'existe pas de solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$ pour cette donnée initiale.
2. À partir de maintenant, on s'intéresse à des solutions faibles pour (1).
   (a) Adapter la définition du cours de sorte à proposer une notion de solution faible pour (1).
   *Dans la suite on dira que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une fonction $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ de courbe $\Gamma = \{(t, \gamma(t)), t \geqslant 0\}$, telle que*
      *i.* $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[ \times \mathbb{R} \setminus \Gamma)$
      *ii. $u$ admet des traces à gauche et à droite de $\Gamma$ respectivement :*

$$u_-(t) = \lim_{x \to \gamma(t)_-} u(t,x), \quad u_+(t) = \lim_{x \to \gamma(t)_+} u(t,x)$$

      *iii. $u_-$ et $u_+$ dépendent continuement de $t$*
   (b) Démontrer que $u$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est solution faible de (1) si, et seulement si, $u$ est solution classique de (1) en dehors de $\Gamma$ et la relation suivante (appelée relation de Rankine et Hugoniot [1]) est vérifiée :

$$\forall t > 0, \quad f(u_+(t)) - f(u_-(t)) = (u_+(t) - u_-(t))\gamma'(t).$$

   *Indication : on pourra considérer une fonction test dont le support est localisé au voisinage de $\Gamma$.*

1. Pierre-Henri Hugoniot (1851-1887) et William Rankine (1820-1872)

3. On suppose maintenant que $f(u) = u^2/2$. (Équation de Burgers[2].)
   (a) Déterminer une solution faible pour la donnée initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   (b) On considère la donnée initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Démontrer que les deux éléments de $L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[\times\mathbb{R})$ suivants sont solutions faibles pour la même donnée initiale $u_0$ :

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < t/2, \\ 1, & \text{si } x > t/2, \end{cases} \qquad u_2(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{si } 0 < x < t, \\ 1, & \text{si } x > t, \end{cases}.$$

   En étudiant la famille de solutions générées par la famille de données initiales, $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ nx, & \text{si } 0 < x < 1/n, \\ 1, & \text{si } x > 1/n, \end{cases}$$

   quelle solution entre $u_1$ et $u_2$ faut-il choisir pour que l'opérateur qui associe la solution $u(\cdot, t)$ à la donnée initiale $u_0$ soit continu dans $L^1_{\text{loc}}$ ?

2. Johannes Martinus Burgers (1895-1981)