Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

TD 4. EDP elliptiques en dimension 1

Exercice 1. On considère le problème aux limites suivant :

$$\text{trouver } u \in C^2([0,1]) \quad \text{tel que}$$
$$-u''(x) + a(x)\,u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \tag{1}$$
$$u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \tag{2}$$

Les fonctions, $a, f \in C^0[0,1]$ sont données, ainsi que les réels α, β. On suppose $a(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0,1]$.

1. En utilisant les théorèmes de base sur les équations différentielles, montrer que les solutions de (1) forment un espace affine de dimension 2.
2. Pour $v \in C^2(]0,1[) \cap C^0[0,1]$, on pose $(\mathcal{L}v)(x) = -v''(x) + a(x)\,v(x)$. Montrer que

$$(\mathcal{L}v)(x) \leqslant 0,\ \forall\, x \in]0,1[,$$
$$\text{entraîne} \quad v(x) \leqslant \max(0, v(0), v(1)),\ \forall\, x \in [0,1].$$

   Indication : quel est le signe de v'' sur les intervalles où $v > 0$?
3. Vérifier que, si u est solution de (1), (2), alors la fonction

$$w(x) = u(x) - |\alpha|\,(1-x) - |\beta|\,x - \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

   vérifie $(\mathcal{L}w)(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in [0,1]$.
4. Montrer que les solutions de (1), (2) vérifient

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad |u(x)| \leqslant |\alpha|\,(1-x) + |\beta|\,x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

   en déduire l'unicité des solutions de (1), (2).
5. Montrer que la solution du problème

$$-v''(x) + a(x)\,v(x) = 0, \quad \forall x \in]0,1[,$$
$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 1,$$

   vérifie $v(1) \neq 0$. En déduire que le problème (1), (2) admet une solution et une seule, et que de plus, si $a \in C^k[0,1]$ et $f \in C^k[0,1]$, alors $u \in C^{k+2}[0,1]$.

Exercice 2. Fonction de Green en dimension 1
Soit $f \in C^0([0,1])$. On considère le problème suivant :

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, \qquad x \in]0,1[, \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{4}$$

1. Vérifier que la solution de (3), (4) s'écrit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy, \tag{5}$$

avec

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ x(1-y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

2. En déduire le principe du maximum :

$$\begin{array}{lcl} f \geqslant 0 & \Longrightarrow & u \geqslant 0 \\ f \geqslant 0 \text{ et } f \not\equiv 0 & \Longrightarrow & u > 0 \text{ sur }]0,1[. \end{array}$$

3. On remplace la condition de Dirichlet (4) par une condition de Neumann :

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \tag{7}$$

Démontrer que (3), (7) admet une solution, unique à une constante près, sous la condition nécessaire et suffisante

$$\int_0^1 f(x)dx = 0,$$

et que cette solution prend encore la forme (5), avec le noyau donné cette fois par

$$G(x,y) = y - x \ \text{ si } \ 0 \leqslant y \leqslant x \ \text{ et } \ G(x,y) = 0 \text{ sinon.}$$

4. Étudier le cas de la condition mixte Dirichlet-Neumann

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \tag{8}$$