Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

# TD 5. Distributions et espaces de Sobolev

**Exercice 1.** Calcul de dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Calculer la dérivée première et la dérivée seconde, au sens des distributions sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f(x) = |x|$. Quelle est la dérivée d'ordre $k$ ?

**Exercice 2.** Étude de $W^{1,p}(0,1)$

1. *Injections de Sobolev*
   (a) Soit $g \in L^1(0,1)$. On pose $w(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Montrer que $w \in C^0[0,1]$ et que sa dérivée, prise au sens des distributions, est $w' = g$.
   (b) Montrer que, si de plus $g \in L^p(0,1)$, et $1 \leqslant p < +\infty$, alors $w \in C^{0,\alpha}[0,1]$ avec $\alpha = 1 - 1/p$. On rappelle que, pour $0 < \alpha < 1$,
   $$C^{0,\alpha}[0,1] := \{v \in C^0[0,1]\,;\exists C \text{ tel que } \forall\, x,y \in [0,1], \\ |v(x)-v(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha\}.$$
   (c) Montrer que, si $g \in L^\infty(0,1)$, alors $w \in C^{0,1}[0,1]$, où
   $$C^{0,1}[0,1] := \{\text{fonctions uniformément lipschitziennes sur } [0,1]\}.$$
   (d) En comparant $u$ et $w$ défini par $w(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$, montrer que, si $u \in W^{1,p}(0,1)$, alors
   $$u \in C^{0,1-1/p}[0,1], \text{ si } 1 \leqslant p < +\infty, \quad \text{et} \quad u \in C^{0,1}[0,1], \text{ si } p = +\infty.$$
   (e) Montrer que l'injection canonique, liée à l'inclusion
   $$W^{1,p}(0,1) \subset C^0[0,1],$$
   est continue.
2. *Caractérisation de $W_0^{1,p}$*
   (a) On pose $W_0 = \{v \in W^{1,p}(0,1)\,; v(0) = v(1) = 0\}$ (l'inclusion précédente montre que $v(0)$ et $v(1)$ sont bien définis, puisque $v$ est continue). Montrer que, pour $p \neq \infty$, on a $W_0^{1,p}(0,1) \subset W_0$.
   (b) Soit $v \in W_0$ et $p \neq \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ vérifiant $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$ tel que l'on ait $\varphi_n \to v'$ dans $L^p(0,1)$. En déduire que $W_0^{1,p}(0,1) = W_0$.
3. *Formule de Green et application*
   (a) Montrer que $W^{1,p}(0,1) = W_0^{1,p}(0,1) \oplus \mathbb{P}_1$. En déduire que $\mathcal{D}([0,1])$ est dense dans $W^{1,p}(0,1)$.

(b) Soit $u$ et $v \in W^{1,1}(a,b)$, montrer que $uv \in W^{1,1}(a,b)$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ et que

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Si de plus $u \in W^{1,p}(a,b)$ et $v \in W^{1,q}(a,b)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, en déduire que $u\,v \in W^{1,p}(a,b)$.

(c) Soit $a < b < c$. Pour $u \in L^p(a,c)$, on note $u_g = u_{|_{(a,b)}}$ et $u_d = u_{|_{(b,c)}}$. Montrer que

$$u \in W^{1,p}(a,c) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_g \in W^{1,p}(a,b), \\ u_d \in W^{1,p}(b,c), \\ u_g(b) = u_d(b) \end{cases}$$

**Exercice 3.** Inégalités de Poincaré, Poincaré-Wirtinger et de Deny-Lions
On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, connexe.

1. On veut démontrer par l'absurde qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad \|u\|_{L^2} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}\,.$$
Vérifier que nier cette inégalité entraîne l'existence d'une suite $u_n$ de $H^1(\Omega)$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_{L^2} = 1, \qquad \|\nabla u_n\|_{H^1} < \frac{1}{n}\,.$$
En utilisant le théorème de Rellich, montrer qu'il existe une fonction $u \in L^2(\Omega)$ telle que $\|u\|_{L^2} = 1$ et telle que, après extraction d'une sous-suite (renommée $u_n$), on ait $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.
En examinant la convergence de la suite $\nabla u_n$, montrer que $u$ est une fonction constante appartenant à $H_0^1(\Omega)$ et établir une contradiction.
2. Pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$, on note
$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx,$$
où $|\Omega| = \int_\Omega dx$. Montrer par l'absurde qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de $\Omega$ telle que
$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - \overline{u}\|_{L^2} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}.$$
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $\Pi_k$ la projection orthogonale (dans $H^k(\Omega)$) sur l'ensemble $\mathbb{P}_k$ des polynômes de degré $\leqslant k$. Montrer que
$$\forall u \in H^{k+1}(\Omega), \qquad \|u - \Pi_k u\|_{H^k} \leqslant C|u|_{H^{k+1}}\,,$$
où l'on note
$$\|u\|_{H^{k+1}} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}, \quad |u|_{H^{k+1}} = \left(\sum_{|\alpha|=k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$