Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

TD 6. EDP elliptiques

Exercice 1. Identification de formulations variationnelles

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V \qquad a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x) dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)\, v(x) dx + a_0\, v(0) + a_1\, v(1).$$

Les données sont la fonction $f \in L^2(0,1)$, et les réels a_0 et a_1 .

1. Étudier ce problème dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{ll} V = H_0^1(0,1), & V = H^1(0,1), \\ V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(1) = 0\}, & V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(0) = 0\}, \\ V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(0) = v(1)\}, & V = \{v \in H^1(0,1)\,;\int_0^1 v(x)\,dx = 0\}. \end{array}$$

2. Dans les cas bien posés, montrer que la solution u de (1) vérifie (au sens des distributions) une équation différentielle que l'on précisera. Montrer que $u' \in C^0[0,1] \cap H^1(0,1)$. En déduire que, pour tout $v \in V$, $a(u,v) - L(v)$ peut s'écrire sous une forme ne faisant intervenir que des termes au bord.
3. Montrer que, dans chacun des cas bien posés, (1) équivaut à un problème différentiel à conditions au bord, que l'on précisera.
4. Montrer que

$$\begin{array}{lll} f \in H^m(0,1) & \text{entraîne} & u \in H^{m+2}(0,1), \\ f \in C^k([0,1]) & \text{entraîne} & u \in C^{k+2}([0,1]). \end{array}$$

Exercice 2. Problème de Fourier pour le Laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe borné régulier, on se donne $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω et λ un réel strictement positif. On considère alors le problème elliptique suivant, avec conditions de Robin sur le bord :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \lambda\, u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où ν est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω et $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.

1. Donner la formulation variationnelle de (2) en supposant la régularité nécessaire.

2. Montrer qu'il existe $C_\Omega > 0$, ne dépendant que de Ω, telle pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on ait
$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$
où l'on rappelle que γ_0 est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution au problème variationnel associé à (2).
4. Revenir à la formulation faible.

Exercice 3. Une question de compatibilité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et on veut résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \qquad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= g, \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

1. Donner la formulation variationnelle du problème sur $H^1(\Omega)$ et montrer qu'elle n'admet pas une unique solution.
2. On pose
$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x)\, dx = 0 \right\}.$$
À l'aide de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, montrer que la formulation variationnelle est bien posée sur V.
3. Revenir à la formulation faible et montrer que la solution faible correspondante u ne satisfait (3) que sous une condition que doivent satisfaire f et g.

Exercice 4. Le bilaplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère $f \in L^2(\Omega)$ et on veut résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f, \qquad \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

1. Donner la formulation variationnelle du problème sur l'espace
$$H^2_0(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \, u = \nabla u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$
2. Montrer que (4) admet une unique solution au problème variationnel.
3. Revenir à la formulation faible.