Le polynôme minimal est irréductible

Théorème 1. Le polynôme minimal d'un élément algébrique sur un corps est irréductible.

Démonstration. Soit K un corps. Soit L/K une extension de K. Soit $\alpha \in L/K$ un élément algébrique sur $\mathbb{K}$. On regarde l'application

$$ev_\alpha : \begin{cases} K[X] & \to & L \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{cases}$$

Le noyau de ev_α est l'idéal qui contient tous les polynômes qui annulent α. Comme $K[X]$ est principal (car K est un corps), il existe un polynôme Π_α tel que

$$\ker(ev_\alpha) = (\Pi_\alpha)$$

En quotientant par le noyau, on a

$$K[X]/(\Pi_\alpha) \simeq K[\alpha] \subset L$$

Or L est intègre (car c'est un corps) donc $K[\alpha]$ est intègre. Ainsi l'idéal (Π_α) est un idéal premier, donc Π_α est premier dans $K[X]$ donc irréductible. □

On a utilisé la propriété suivante :

Proposition 1. Dans un anneau intègre, un élément premier est irréductible.

Démonstration. Soit p un élément premier d'un anneau A intrègre. On sait que si $p \mid ab$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Pour montrer que p est irréductible, on suppose que $p = ab$, on veut montrer que soit a est inversible, soit b est inversible. On a $p \mid ab$ d'où $p \mid a$ ou $p \mid b$, on suppose que $p \mid a$ sans perte de généralité. Ainsi $a = pk$ avec $k \in A$. Donc $p = pkb$, d'où

$$p(1 - kb) = 0$$

Or $p \neq 0$ car p est premier (par définition de être premier). Donc

$$1 - kb = 0$$

par intégrité de A. Donc $kb = 1$ et ainsi b est inversible. □