106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous groupes de GL(E)

I Groupe linéaire en algèbre linéaire

1) Cadre et généralités

E espace vectoriel de dimension n sur K où K est un corps

Def 1 : On appelle groupe linéaire de E, les automorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de E muni de la loi de composition $\circ$. On le note $GL(E)$

Ex 2 : l'identité Id appartient à $GL(E)$

2) Isomorphisme avec les matrices

Def 3 : On appelle groupe linéaire matriciel, l'ensemble des matrices inversibles (de taille n) muni de la multiplication. On le note $GL_n(\mathbb{K})$

Rmq 4 : Par l'isomorphisme entre matrices et applications linéaires, on a aussi un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$

Def 5 : On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ^{-1}$

Prop 6 : Si A et B sont équivalentes, elles ont le même rang

Def 7 : On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$

Prop 8 : Deux matrices semblables représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Ex 9 : $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-3&8\\-2&5\end{pmatrix}$ sont semblables où $P = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$

Def 10 : On appelle matrice de permutation une matrice P_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en permutant les colonnes de I_n selon σ, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Prop 11 : On a $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Prop 12 : Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ où ε est le morphisme signature.

Ex 13 : $\det\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = -1 = \varepsilon((1\,3))$

Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini, on peut dénombrer $GL_n(\mathbb{K})$

Prop 14 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ où $q = p^k$ avec p premier on a $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$

Appli 15 : On utilise ce résultat pour dénombrer les matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ DEV 1

3) Topologie du groupe linéaire

Prop 16 : $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont ouverts dans l'espace des matrices (Utilisation du déterminant pour le prouver)

Prop 17 : $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont denses dans l'espace des matrices.

Appli 18 : Différentielle du déterminant.

Prop 19 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe alors que $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas (Utilisation du déterminant car $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe)

II Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$

Def 20 : On appelle groupe spécial linéaire de E le noyau du déterminant

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \ / \ \det A = 1 \}$$

On veut trouver des générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$.

Def 21 : Soit $u \in GL(E)$. On dit que u est une dilatation si dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda \neq 1$

Prop 22 : Soit H un hyperplan de E, soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_H$

Il y a équivalence entre :
(i) u est une dilatation.
(ii) $\det u = \lambda \neq 1$ (i.e. $u \notin SL(E)$)
(iii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et est diagonalisable
(iv) $\mathrm{Im}(u - Id) \not\subset H$.

Illustration 23 : voir annexe

Def 24 : Soit $u \in GL(E)$. On dit que u est une transvection si dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prop 25 : Soit H hyperplan d'équation $f \in E^*$, soit $u \in GL(E)$, $u \neq id$ tel que $u_{|H} = id_H$

il y a équivalence entre
(i) u est une transvection
(ii) $\det u = 1$
(iii) u n'est pas diagonalisable
(iv) $D = \mathrm{Im}(u - Id) \subset H$
(v) $\exists a \in H \ a \neq 0 \ / \ \forall x \in E \ u(x) = x + f(x)a$.

voir annexe

Application 26 : Pivot de Gauss

Thm 27 : Les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$

Thm 28 : Les transvections engendrent $SL(E)$

Prop 29 : Le centre de $GL(E)$ est formé des homothéties de E de rapport non nul.

Prop 30 : Le centre de $SL(E)$ est formé des homothéties de E dont le rapport est une racine n-ième de l'unité de $\mathbb{K}$

Application 31 : définition de $PGL(E)$ et $PSL(E)$ les groupes projectifs de $GL(E)$ et $SL(E)$ en quotientant par leur centre respectif

Pour les corps finis on peut à nouveau dénombrer ces groupes :

Prop 32 : $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-2}) q^{n-1} = N$

$|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = N$

$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = N / \mathrm{pgcd}(n, q-1)$

Appli 33 : isomorphismes exceptionnels
* $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
* $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ $\quad PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$
* $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
* $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ $\quad PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$

III Groupe orthogonal

Def 34 : Soit E muni d'un produit scalaire réel
u est une transformation orthogonale si $\forall x, y \in E \ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Def 35 : On appelle groupe orthogonal, l'ensemble des transformations orthogonales. On le note $O(E)$

Prop 36 : $O(E)$ est isomorphe à $O_n(\mathbb{R})$ où $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) / \, {}^tAA = I_n\}$

Prop 37 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal pour l'inclusion de $GL_n(\mathbb{R})$

Thrm 38 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$ où $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Def 39 : On appelle groupe spécial orthogonal, les transformations orthogonales de déterminant 1. on le note $SO(E)$

Appli 40 : Etude de $O(p,q)$ DEV2

Thrm 41 : $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément par au plus n réflexions pour $u \in O(q)$

Thrm 42 : Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements. Plus précisément par au plus n renversements pour $u \in SO(q)$

Cas de la dimension 2 et 3 :

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\rangle$$

$$O_3(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\rangle$$

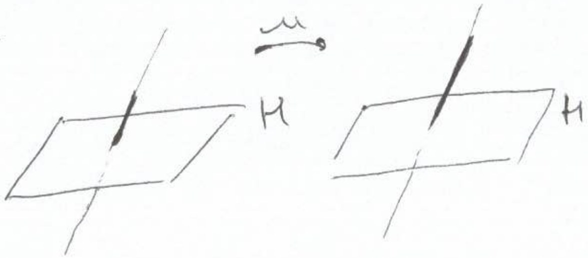
$$SO_3(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\rangle$$

Thrm 43 : Soit $u \in O(E)$. Dans une base convenable u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $\theta_i \in [0; 2\pi[$, et $\theta_i \neq 0, \pi$.

dilatation



transvection