123 — Corps finis. Applications — [Perrin]

Motivations : Cryptographie / Transformée de Fourier discrète / Codes correcteurs.

I Corps finis

1) Construction des corps finis

K est un corps.

Def 1 : La caractéristique de K est le générateur de $\ker\varphi$ où $\varphi : \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto n.1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ fois}}$. On notera $\mathrm{char}(K)$

Prop 2 : La caractéristique d'un corps K est nulle ou un entier p premier.

Prop 3 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow$ n est premier

Ex 4 : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de caractéristique p / $\mathbb{Q}$ est de caractéristique 0

Def prop 5 : Le sous corps premier de K est le plus petit sous corps de K (contenant 1). Il vaut $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $\mathrm{char}(K) = p$ / $\mathbb{Q}$ si $\mathrm{char}(K) = 0$

Ex 6 : $\mathbb{F}_p(X)$ a pour sous corps premier $\mathbb{F}_p$
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ont pour sous corps premier $\mathbb{Q}$.

Corollaire 7 : Tout corps fini K est une extension de $\mathbb{F}_p$
Si $n = \dim_{\mathbb{F}_p}(K) = [K : \mathbb{F}_p]$, alors $|K| = p^n$

Def 8 : Le morphisme de Frobenius est $F : K \to K$, $x \mapsto x^p$ pour $p = \mathrm{char}(K)$

Prop 9 : F est un automorphisme (pour K fini), injectif + même cardinal au départ et à l'arrivée
F est l'identité sur $\mathbb{F}_p$ (petit théorème de Fermat)

Ex 10 : Pour tout x dans $\mathbb{F}_q$, $x^q = x$.

Thm Def 11 : Soit $q = p^n$, il y a existence et unicité (à isomorphisme (non unique) près) du corps à q éléments. On le note $\mathbb{F}_q$.
- $\mathbb{F}_q$ est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$
- $\mathbb{F}_q$ est l'ensemble des racines de $X^q - X$ sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$

Prop 12 : Soit P un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_p$. Le corps $\mathbb{F}_q$ est alors le corps de rupture de P sur $\mathbb{F}_p$

Ex 13 : $\mathbb{F}_4 = \frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^2+X+1)}$ cf. annexe Attention $\mathbb{F}_4 \not\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Prop 14 : On a $(\mathbb{F}_q, +) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ en tant que groupe abélien fini

Ex 15 : $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Thm 16 : On a $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m}$ si et seulement si $n \mid m$

Ex 17 : Diagramme d'inclusions pour $p = 2$ en annexe

2) Dénombrement et géométrie sur les corps finis

→ comme produit cartésien d'ensemble fini : $|(\mathbb{F}_q)^N| = q^N$
→ en faisant agir $\mathbb{F}_q^*$ sur $(\mathbb{F}_q)^n \setminus \{0\}$: $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \dots + q^n$
→ en comptant les bases de $(\mathbb{F}_q)^n$: $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$
→ en quotientant $GL_n(\mathbb{F}_q)$ par les homothéties $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}$
→ en utilisant le morphisme déterminant : $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}$
→ en quotientant $SL_n(\mathbb{F}_q)$ par son centre : $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(q-1,n)} |SL_n(\mathbb{F}_q)|$
car $|\mu_n(\mathbb{F}_q)| = \mathrm{pgcd}(q-1, n)$

Prop 18 : On a les isomorphismes exceptionnels suivants :
(i) $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
(ii) $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$, $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$
(iii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
(iv) $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$, $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$

3) Etude des carrés sur les corps finis

Def 19 : $\mathbb{F}_q^{*2}$ est l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_q$: $\{x \in \mathbb{F}_q / \exists a \in \mathbb{F}_q \; x = a^2\}$
$\mathbb{F}_q^{*2}$ est l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_q^*$: $\{x \in \mathbb{F}_q^* / \exists a \in \mathbb{F}_q^* \; x = a^2\}$

Ex 20 : Les carrés de $\mathbb{F}_7^*$ sont 1, 2 et 4

[Perrin] — [Wil2G2]

[Perrin] [Dem] [Dem] [Perrin] [Gou] [Perrin] [Perrin] [Perrin] [Rey]

Prop 21 : $\mathbb{F}_q^*$ et $\mathbb{F}_q^{*2}$ sont des groupes cycliques

Rmq 22 : En pratique, il n'est pas facile de trouver un générateur de ces groupes

Ex 23 : 2 est un générateur de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$
$\overline{x}$ est un générateur de $(\mathbb{F}_4)^*$
a est un générateur de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{*2}$

Prop 24 : Pour $p>2$, x est un carré dans $\mathbb{F}_q^* \iff x^{\frac{q-1}{2}} = 1$

Corollaire 25 : -1 est un carré dans $\mathbb{F}_q \iff q \equiv 1 [4]$

Application 26 : Théorème des deux carrés (car p premier)

Application 27 : Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ par le discriminant

Def 28 : Le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ vaut $\begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Ex 29 : $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{7}\right) = 1$

Prop 30 : pour a, b entiers on a $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} [p]$; $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ ssi $p \equiv 1 [4]$ $\quad \left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv 1 [3] \\ -1 \text{ si } p \equiv 2 [3] \end{cases}$

Thm 31 : Loi de réciprocité quadratique
Soient p, q premiers impairs distincts, on a $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ DEV1

II) Irréductibilité des polynômes sur $\mathbb{F}_q[X]$

La connaissance d'un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_p$ valide la construction alternative de $\mathbb{F}_q$ proposée en 12

a) Critère d'irréductibilité

Prop 32 : Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré n. P est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si P n'a pas de racine dans les extensions de $\mathbb{F}_q$ de degré inférieur ou égal à $n/2$

Ex 33 : Pour montrer que X^4+X+1 est irréductible sur $\mathbb{F}_2$, il suffit de montrer qu'il n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$ ni $\mathbb{F}_4$

Prop 34 : Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ irréductible de degré n, soit K une extension de degré m avec $\text{pgcd}(m,n) = 1$. Alors P est irréductible sur K

Ex 35 : X^3+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$, donc est irréductible sur $\mathbb{F}_{2^n}$ si $3 \nmid n$. Par contre il est réductible sur $\mathbb{F}_8$.

Prop 36 : (critère d'Eisenstein) Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, on suppose qu'il existe p premier tel que
(i) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $p \mid a_k$ (ii) $p \nmid a_n$ (iii) $p^2 \nmid a_0$
Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X]$

Ex 37 : $P(X) = X^4+1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ car $P(X+1)$ l'est avec $p=2$

Prop 38 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, soit p premier, on pose $\overline{P}$ la réduction de P dans $\mathbb{F}_p[X]$, on suppose que $\overline{a_n} \neq 0$. Alors, si $\overline{P}$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, on a P irréductible sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{Z}$

Ex 39 : $P(X) = X^3+4X^2-5X+7 \equiv X^3+X+1 [2]$ irréductible sur $\mathbb{F}_2$
Donc P est irréductible sur $\mathbb{Z}$

Réciproque fausse 40 : X^4+1 est réductible sur tous les $\mathbb{F}_p$ mais irréductible sur $\mathbb{Z}$.

2) Les polynômes cyclotomiques

Intérêt 41 : étude des irréductibles de $X^N - 1$ sur $\mathbb{F}_q$
On fixe N et $q = p^n$, tels que $\text{pgcd}(N,p) = 1$

Def 42 : On considère $K_{N,p}$, le corps de décomposition de X^N-1 sur $\mathbb{F}_p$. On pose $\Phi_{N,p}(X) = \prod_{\omega \in \mu_N^*(K_{N,p})} (X-\omega)$
où $\mu_N^*(K_{N,p})$ est l'ensemble des racines primitives $N^{ième}$ de l'unité sur $K_{N,p}$
ce sont les polynômes cyclotomiques

Ex 43 : $\Phi_{2,3}(X) = X+1$ car $\mu_2^*(K_{2,3}) = \{-1\}$

Prop 44 : On a $X^N - 1 = \prod_{d \mid N} \Phi_{d,p}(X)$

Utilisation 45 : On peut calculer les polynômes cyclotomiques récursivement grâce à cette propriété
voir annexe.

Prop 46 : On suppose $\text{pgcd}(N,q) = 1$ ($\Leftrightarrow p \nmid N$). Soit r l'ordre de q dans le groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Alors $\Phi_{N,p}$ se décompose dans $\mathbb{F}_q[X]$ en produit de polynômes irréductibles, de degré r, tous différents.

3) Déterminer automatiquement si un polyne est irréductible

Algo 47. Algorithme de Berlekamp
Cet algorithme permet de trouver la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme sur $\mathbb{F}_q$.

DEV2 Max

III Applications au monde réel

1) Trouver des nombres premiers très très grands

Def 48: Un nombre de Mersenne s'écrit 2^q-1 pour q premier impair. On le note M_q.

Thm 49: M_q premier $\iff (2+\sqrt{3})^{2^{q-1}} \equiv -1 [M_q]$

DEV2 Pierre

Algo 50: Test de Lehmer Lucas
Soit $(L_n)_{n\geq 0}$ la suite de $\mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ définie par $L_0 = 4$ et $L_{n+1} = L_n^2 - 2 [M_q]$

Alors M_q premier $\iff L_{q-2} \equiv 0 [M_q]$

Appli 51: → Système RSA.
→ Donner le plus grand nombre premier qu'on connaisse

2) Transformée de Fourier Rapide (TFR)

Def 52: (Transformée de Fourier Discrète TFD) Soit $N \in \mathbb{N}^*$
Pour ω une racine $N^{ième}$ primitive de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ on pose $\mathcal{F}: (\mathbb{F}_q)^N \to (\mathbb{F}_q)^N$, $(a_i)_1^N \mapsto \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{-kj}\right)_{j=1}^N$ la TFD

et $\overline{\mathcal{F}}: (\mathbb{F}_q)^N \to (\mathbb{F}_q)^N$, $(a_i)_1^N \mapsto \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{kj}\right)_{j=1}^N$ la TFD inverse

Prop 53: On a $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(a)) = Na$ et $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(a)) = Na$ $\forall a \in (\mathbb{F}_q)^N$

Prop 54: (Convolution) $\mathcal{F}(a*b) = \mathcal{F}(a).\mathcal{F}(b)$ et $\overline{\mathcal{F}}(a*b) = \overline{\mathcal{F}}(a).\overline{\mathcal{F}}(b)$ avec $a.b$ le produit terme à terme de a et b $(a,b \in (\mathbb{F}_q)^N)$

Prop 55: (TFR) Etant donnée une racine primitive $N^{ième}$ de l'unité dans $\mathbb{F}_q$, on peut calculer récursivement la TFD en $\mathcal{O}(N \log N)$

Appli 56: Multiplication des grands polynômes/grand entiers en $\mathcal{O}(N \log N)$ (schéma en annexe)

3) Codes correcteurs

Def 57: Un code linéaire C de taille N et de dimension m est un sous espace vectoriel de dimension m de $(\mathbb{F}_q)^N$.

Def 58: Un code linéaire est cyclique s'il est stable par décalage circulaire (i.e. si $a_0 \dots a_{n-1} \in C$ alors $a_{n-1} a_0 a_1 \dots a_{n-2} \in C$)

On peut le voir comme multiplication par X via l'isomorphisme $(\mathbb{F}_q)^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q[X]/(X^N-1)$, $(a_i)_0^{N-1} \mapsto \sum_{i=0}^{N-1} a_i X^i$, ainsi C est stable par multiplication par tout polynôme donc c'est un idéal de $\mathbb{F}_q[X]/(X^N-1)$, il est isomorphe à un idéal (principal) de $\mathbb{F}_q[X]$ contenant X^N-1 (par la correspondance des idéaux)

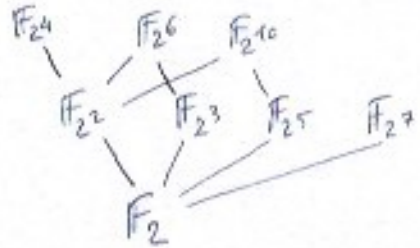
Donc un code cyclique est engendré par un unique facteur irréductible P de X^N-1 sur $\mathbb{F}_q$.

Ex 59: Les codes BCH utilisent la cyclotomie pour générer des codes de distance minimale fixée. Leur décodage s'effectue efficacement par TFR.

Annexe 1 : table de $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(1+X+X^2)$ multiplicative

	0	1	$\bar{x}$	$1+\bar{x}$
0	0	0	0	0
1	0	1	$\bar{x}$	$1+\bar{x}$
$\bar{x}$	0	$\bar{x}$	$1+\bar{x}$	1
$1+\bar{x}$	0	$1+\bar{x}$	1	$\bar{x}$

Annexe 2 : Diagramme des inclusions des $\mathbb{F}_{2^k}$



Annexe 4 : $N = 2^n$ $N \geq \deg P + \deg Q + 1$

$(P,Q) \in \mathbb{F}_q^N \times \mathbb{F}_q^N \xrightarrow[G(N\log N)]{TRR_\omega} (\mathcal{F}P, \mathcal{F}Q) \in \mathbb{F}_q^N \times \mathbb{F}_q^N$

$G(N)$ | produit terme à terme

$(P \times Q) \in \mathbb{F}_q^N \xleftarrow[TFR_{\omega^{-1}}]{G(N\log N)} \mathcal{F}P \cdot \mathcal{F}Q = \mathcal{F}(P \times Q)$

Annexe 3 : pour $p = 11$

n	$\Phi_{n,p}(X)$
1	$X-1$
2	$X+1$
3	X^2+X+1
4	X^2+1
5	$X^4+X^3+X^2+X+1$
6	X^2-X+1
7	$X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$
8	X^4+1

Références :

[Per] Daniel Perrin, Cours d'algèbre

[Pey] Gabriel Peyré, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

[Sau] Sanz Picart-Ramneu, Cours de Calcul formel, corps finis systèmes polynomiaux applications

[NH2G2] Caldero-Germoni NH2G2 Tome 2

[Dem] Michel Demazure, Cours d'algèbre

[Gou] Xavier Gourdon, Algèbre