159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Ex et Appli

Motivation : permet de dédoubler les résultats par dualité

I Formes linéaires et hyperplans

1) Définitions

E un espace vectoriel (sur un corps $\mathbb{K}$) de dim finie n.

Def 1 : On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$

Ex 2 : $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ où (e_i) est une base de E est une forme linéaire

Def 3 : On appelle noyau de φ, l'ensemble $\{x \in E \,/\, \varphi(x) = 0\}$ on le note $\mathrm{Ker}\,\varphi$

Prop 4 : Si φ est une forme linéaire non nulle alors $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n-1$

Ex 5 : $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = x_1$ Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}(x_2, \dots, x_n)$ de dim $n-1$.

Prop 6 : Le rang d'une forme linéaire non nulle est 1 i.e $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 1$

2) Lien avec les hyperplans

Def 7 : On appelle hyperplan H de E, un sous espace de E de dimension $n-1$.

Rmq 8 : On a donc vu que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan (Prop 4)

Prop 9 : Pour $u \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$ on a $E = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathbb{K}u$

Thm 10 : Tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle

Rmq 11 : On peut donc définir de manière cohérente $H = \{x \in E \,/\, \varphi(x) = 0\}$ pour φ une forme linéaire non nulle

Ex 12 : $H = \{x \in E \,/\, x_1 = 2x_2\}$ est décrit par $\varphi(x) = 2x_2 - x_1$ en écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Prop 13 : Deux formes linéaires φ et $\tilde{\varphi}$ non nulles ont le même noyau SSi elles sont proportionnelles

II Dualité

1) Base duale

Def 14 : On appelle dual de E, l'ensemble des formes linéaires sur E, noté E^* (ou $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$)

Prop 15 : $\dim E = \dim E^*$ (puisqu'on est en dim finie)

Corollaire 16 : E et E^* sont isomorphes

Rmq 17 : L'isomorphisme n'est pas canonique, il dépend des bases choisies.

Def 18 : Soit $(e_i)_{i=1}^{n}$ une base de E, on appelle forme linéaire coordonnée d'indice i la forme linéaire e_i^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Prop 19 : Soit $(e_i)_1^n$ base de E. Alors $(e_i^*)_1^n$ est une base de E^*, on l'appelle la base duale de $(e_i)_1^n$.

Ex 20 : La base duale de la base $\{e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,0,-1),\ e_3 = (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est $\{\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3,\ \theta_2(x) = x_2 - x_3,\ \theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3\}$

Def 21 : On peut définir le bidual de E comme E^{**}

$$E^{**} := \{\varphi : E^* \to \mathbb{K} \text{ , linéaire}\}$$

Thrm 22 : Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : E^* \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$

On a $\tilde{x} \in E^{**}$ et $\phi : E \to E^{**}$, $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme (canonique)

Rmq 23 : Il ne dépend pas de bases choisies donc on peut identifier E et E^{**}.

Prop 24 : Soit $(\varphi_i)_1^n$ une base de E^*.
Il existe une unique base $(e_i)_1^n$ de E telle que $e_i^* = \varphi_i \ \forall i$

2) Orthogonalité

Def 25 : Pour $x \in E$, $\varphi \in E^*$, ils sont dits orthogonaux si $\varphi(x) = 0$

Ex 26 : $u = (1,0,0)$ $\varphi(x) = x_2 + x_3 \ \forall x \in E$
$\varphi(u) = 0$ donc φ et u sont dits orthogonaux

Def 27 : Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* / \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$
$A^\perp \subset E^*$ est appelé orthogonal de A
Si $B \subset E^*$ on note $B^\circ = \{x \in E / \forall \varphi \in B \ \varphi(x) = 0\}$
$B^\circ \subset E$ est appelé orthogonal de B.

Prop 28 : Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$
Si $B_1 \subset B_2 \subset E$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$
Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$
Si $B \subset E^*$, alors $B^\circ = (\mathrm{Vect}\, B)^\circ$

Thrm 29 : Si F sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$
Si G sev de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$

Prop 30 : Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*

Appli 31 : Les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ avec K compact sont les formes linéaires $f \mapsto f(a)$ $\forall a \in K$ ou l'application nulle (on se place ici en dimension infinie) DEV 1

3) Transposées :

Def 32 : Soit E, F des $\mathbb{K}$ev, soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\forall f \in F^*$ on a $f \circ u \in E^*$
On appelle $t_u : F^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ u$ la transposée de u.

Prop 33 :
- $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(t_u)$
- $\mathrm{Im}(t_u) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$
- $\mathrm{Ker}(t_u) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

Rmq 34 : Cela coïncide bien avec la notion de transposition des matrices.

III Utilisation en algèbre et en analyse

1) En analyse : différentielle.

Def 35 : Soit E un $\mathbb{R}$ev, U un ouvert de E, $a \in U$
$f : U \to \mathbb{R}$ est dite différentiable en a s'il existe $\varphi \in E'$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$
on appelle φ la différentielle en a de f, on la note df_a

Rmq 36 : On est ici en dimension infinie, E' est le dual de E au sens des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$

Appli 37 : L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
et $d\det_M(H) = (\det M)\, \mathrm{tr}(M^{-1}H)$.

Thrm 38 (Extrema liés)

Soient $f, g_1, \dots g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\Gamma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en a

et si les formes linéaires $dg_{1a} \dots dg_{ra}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

tels que $df_a = \lambda_1 dg_{1a} + \dots + \lambda_r dg_{ra}$

DEV 2

2) En algèbre linéaire : $\dim(E) = n$

On peut voir un système linéaire $AX = B$ $\quad B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

comme une intersection d'hyperplans H_i $\forall i \in [\![1;m]\!]$

$H_i = \{x \in E \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i = 0\}$

On pose $\Lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ les m formes linéaires associées à A

Thrm 39 : Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}^m$

$$v \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda_1(v) \\ \vdots \\ \Lambda_m(v) \end{pmatrix}$$

Alors $\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$

Corollaire 40 : Si $\operatorname{rg}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m) = r$

Alors $\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \Lambda_i$ est de dimension $n - r$

Prop 41 : Soit $r \in [\![1; n]\!]$, V un sev de E de dimension $n-r$, Alors il existe une famille libre de r formes linéaires sur E dont l'intersection des noyaux coïncident avec V

Appli 42 : Calcul de la dimension d'une intersection d'hyperplans H_i

Soient $H_i := \operatorname{Ker} \Lambda_i$

alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) = n - \operatorname{rg}(\Lambda_1 \dots \Lambda_m)$

En notant $r = \operatorname{rg}(\Lambda_1 \dots \Lambda_m)$ et en supposant que les r premières formes linéaires sont indépendantes

alors $\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$

On pourrait donc réduire le système $AX = O_m$ à $A'X = O_r$ avec A' la restriction de A aux r premières lignes.