226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

I Suites récurrentes : cadre

1) Définitions

Def 1 : Soient (E,d) un espace métrique, $h \in \mathbb{N}^*$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire
$\forall n \geq h, \; u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-h})$
où f est une application de E^h dans E

Ex 2 : La suite de Fibonacci $u_0 = 1$ $u_1 = 1$
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est récurrente d'ordre 2

Prop 3 : Dans le même cadre, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et que f est continue au point $(l, l, \dots, l)$
alors on a $l = f(l, l, \dots, l)$
on dit que l est un point fixe de f

Contre-ex 4 : pour $f(x) = -x$ sur $[-1;1]$
$u_0 \neq 0$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est divergente

Rmq 5 : Pour toute suite récurrente d'ordre h on peut se ramener à une suite récurrente vectorielle d'ordre 1.
$\forall n \geq h$ $X_n = \begin{pmatrix} u_{n-h+1} \\ u_{n-h+2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec $\tilde{f} : E^h \to E^h$, $(u_{n-h+1}, \dots, u_n) \mapsto (u_{n-h+2}, \dots, u_n, f(u_n, \dots, u_{n-h+1}))$

Ex 6 : La suite de Fibonacci peut s'écrire
$X_n = A X_{n-1}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

Prop 7 : I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$
Soit $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 \in I$
- Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens est donné par le signe de $u_1 - u_0$
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonie opposée.

Ex 8 : $f(x) = x+1$ (u_n) est croissante $u_0 = 0$

2) Exemples de suites classiques sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- **arithmétique** : pour $f(x) = x + a$ $a \in \mathbb{K}$
on a $u_{n+1} = u_n + a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $u_n = u_0 + na$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- **géométrique** : pour $f(x) = qx$ $q \in \mathbb{K}$
on a $u_{n+1} = q u_n$ d'où $u_n = q^n u_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Si $|q| < 1$ il y a convergence de (u_n)
Si $|q| > 1$ il y a divergence de (u_n)
Si $q = 1$ il y a convergence car constante $= 1$.

- **récurrente linéaire à coefficients constants** :

Def 9 : (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre h à coefficients constants si
$\forall n \geq h$ $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_h u_{n-h}$ $(a_i \in \mathbb{K})_{i \leq h}$

Rmq 10 : On peut se ramener à une suite vectorielle récurrente d'ordre 1
de la forme $X_n = A X_{n-1}$ où $A \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$

Ex 11 : Convergence de polygône vers l'isobarycentre
voir annexe 1

3) Théorèmes du point fixe.

Thrm 12 : Si f est une fonction croissante de $I = [a,b]$ dans I, elle admet alors au moins un pt fixe $\alpha \in I$.

Thrm 13 : Une fonction continue de $[a;b]$ dans $[a;b]$ admet au moins un point fixe

Thrm 14 : Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$ contractante (k constante de Lipschitz)
Alors f admet un unique point fixe dans E et pour tout $x_0 \in E$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a géométriquement, i.e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - a\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - a\|$$

Rmq 15 : Si E est compact et que l'on a $\|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$ $\forall x,y \in E$ on a aussi unicité et existence du point fixe.

Appli 16 : Thrm de Cauchy Lipschitz pour les équations différentielles.

II Recherche de zéros d'une fonction

1) Dichotomie

Thrm 17 : Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telle que f ne s'annule qu'une seule fois en a sur $\mathring{I}$. Alors on peut approcher a par dichotomie.

Algo 18 :

```
tant que |a_n - b_n| > ε
    c = (a_n + b_n)/2
    si f(a_n) f(c) < 0
        b_{n+1} = c
        a_{n+1} = a_n
    si f(b_n) f(c) < 0
        a_{n+1} = c
        b_{n+1} = b_n
    sinon
        a_{n+1} = c
        b_{n+1} = c
```

voir Annexe 2

convergence en $\ln(n)$

2) Méthode de Newton

voir Annexe 3

Thrm 19 : Si $f \in \mathcal{C}^2(I)$, $a \in \mathring{I} / f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$ alors pour tout u_0 "assez proche" de a, la suite

$$u_{n+1} = g(u_n) = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

converge vers a quadratiquement.

Thrm 20 : Si, de plus, f est convexe et $f'(a) > 0$ alors (u_n) converge quadratiquement $\forall u_0 \in [a; +\infty[\cap I$

DEV 1

Ex 21 : On peut approcher la racine p-ième d'un réel $\alpha > 0$ en utilisant $f(x) = x^p - \alpha$ et $u_0 > 0$ $\quad u_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)u_n + \frac{\alpha}{u_n^{p-1}}\right)$

Rmq 22 : On peut appliquer Newton en dimension supérieure avec $g(X_n) = X_n - (df(X_n))^{-1} \circ f(X_n)$

III Recherche de solutions de $AX = B$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$
On veut décomposer A comme $M - N$ avec M inversible
On pose $M X_{k+1} = N X_k + B$ $\forall k \in \mathbb{N}$ pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$

Rmq 23 : Si (X_k) converge vers $\bar{X}$ alors $\bar{X}$ est solution du système $AX = B$

Thrm 24 : Il y a équivalence entre $\rho(M^{-1}N) < 1$ où ρ est le rayon spectral et (X_k) converge quelque soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$

$A = D - E - F$ où D est la diagonale de A
E est l'opposé de la partie strictement inférieure
F est l'opposé de la partie strictement supérieure

- **Méthode de Jacobi**
  $M = D$ et $N = E + F$
- **Méthode de Gauss Seidel**
  $M = D - E$ et $N = F$
- **Méthode de relaxation**
  Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$ $M = \frac{D}{\omega} - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$

2) Méthode du gradient à pas optimal

Thm 25: $A\bar{X} = B \iff \bar{X}$ minimise la fonctionnelle $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \mapsto \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle \end{array}$

Algo 26: pour X_0, on note $R_0 = AX_0 - B$
tant que $\frac{\|R_k\|}{\|R_0\|} > \varepsilon$ faire
- $\alpha_{k+1} = \frac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2}$ où $\|X\|_A^2 = \langle AX, X\rangle$
- $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$
- $R_{k+1} = AX_{k+1} - B$

Thm 27: Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$
La suite (X_n) définie par l'algo 26 converge vers $\bar{X}$ solution de $AX = B$
et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\|X_k\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\frac{\mathrm{Cond}(A) - 1}{\mathrm{Cond}(A) + 1}\right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$

DEV 2

IV Recherche de solutions approchées d'équations différentielles.

1) Schéma d'Euler explicite

Soit $(E) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ une équation différentielle avec conditions initiales sur $[t_0 + T]$

On discrétise $[t_0 + T]$ en notant $h = \frac{T}{m}$ le pas
on a $t_i = t_0 + ih$ avec $t_m = t_0 + T$.
On approche la solution de (E) par la suite (y_n) définie par

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

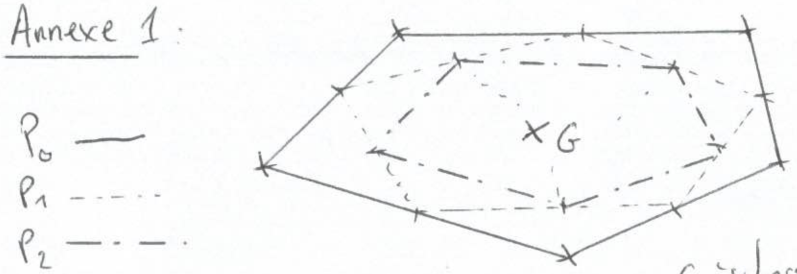
2) Schéma d'Euler implicite

Dans le même cadre, on posera

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

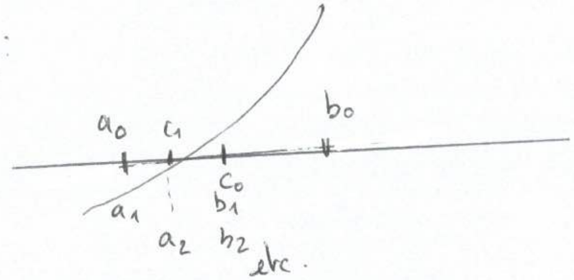
Le schéma d'Euler implicite est plus proche de la solution réelle (l'erreur est moins grande) mais on a une équation à résoudre à chaque itération car dans l'expression de $\tilde{y}_{n+1}$, $\tilde{y}_{n+1}$ apparaît.

Annexe 1 :

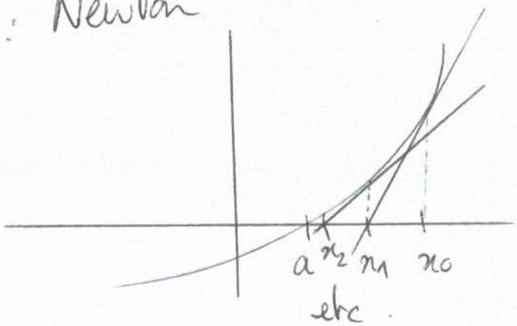


G isobarycentre

Annexe 2 :



Annexe 3 : Newton



Annexe 4 : Euler explicite