233

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires. Recherche de vecteurs propres. Applications

I Outils matriciels

Def 1 : Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est une norme matricielle si elle vérifie
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Ex 2 : La norme de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij})^2}$ est une norme matricielle.

Contre exemple 3 : $\|A\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ n'est pas matricielle.

Def 4 : Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On lui associe une norme subordonnée définie par
$$\|A\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{K}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Prop 5 : Une norme subordonnée est une norme matricielle.

Rmq 6 : Il existe des normes matricielles non subordonnées comme $\|.\|_F$.

Def 7 : Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle rayon spectral de A (noté $\rho(A)$), le maximum des modules des valeurs propres de A.

Prop 8 : On a $\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} (\|A^k\|)^{1/k}$ pour $\|.\|$ une norme matricielle.

Def 9 : Pour une norme matricielle subordonnée $\|.\|$, on appelle conditionnement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la valeur
$$\mathrm{cond}_{\|.\|}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Prop 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
(i) $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1}) = \mathrm{cond}(\alpha A) \quad \forall \alpha \neq 0$
(ii) $\mathrm{cond}_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$

II Systèmes linéaires

On veut résoudre $\boxed{Ax = b}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$

1) Méthode directe

* Pivot de Gauss

Thm 11 : Pour A matrice carrée, il existe au moins une matrice inversible M telle que $T = MA$ soit triangulaire supérieure.

Rmq 12 : On peut trouver T en appliquant des dilatations et des transvections aux lignes de A.

Pour résoudre $Ax = b$ il suffit ensuite de remonter les égalités car $Tx = Mb$ $\quad \begin{pmatrix} \nabla \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \end{pmatrix}$

* Méthode LU

Thm 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les sous matrices diagonales d'ordre k soient inversibles. Il existe un unique couple de matrices (L, U) avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure tel que $A = LU$

Rmq 14 : on doit résoudre $LUx = b$ on trouve déjà y tel que $Ly = b$ puis on résout $Ux = y$ pour avoir x

* Méthode QR

Thm 15 : Soit A réelle inversible. Il existe un unique couple (Q, R) où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs tel que $A = QR$ DEV 1

Rmq 16 : on doit résoudre $QRx = b$ or $Q^{-1} = Q^*$ d'où $Rx = Q^*b$ et R triangulaire donc comme pour le pivot on remonte les égalités.

2) Problème des moindres carrés

On veut trouver une solution x la plus fidèle possible à un problème $Ax = b$ qui n'a pas de solution.

Problème de minimisation : (voir Annexe 1)

$$(*) \quad \|b - Ax\|_n = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_n \quad \text{pour } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Prop 17 : Il existe une solution $x \in \mathbb{R}^p$ du problème $(*)$ ssi x satisfait $A^*Ax = A^*b$

Thm 18 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe toujours au moins une solution à $A^*Ax = A^*b$

De plus, elle est unique ssi $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et $x = (A^*A)^{-1}A^*b$.

3) Méthodes itératives

Def 20 : Soit A inversible, on appelle décomposition régulière de A un couple de matrices (M, N) avec M inversible tel que $A = M - N$

L'idée générale est de construire la suite

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \quad \forall k \quad \text{avec } x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (**)$$

donc il faut (dans la pratique) que M soit beaucoup plus facile à inverser que A.

Par passage à la limite on a $(M - N)x = b$.

Def 21 : On dit qu'une méthode itérative converge si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite (x_n) converge vers la solution exacte x.

Thm 22 : La méthode $(**)$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

*** Méthode de Jacobi**

On associe $M = D$ diagonale de A et $N = D - A$

Avantage : M^{-1} est facile à calculer

Inconvénient : pour calculer $x^{(k+1)}$ il faut toutes les composantes de $x^{(k)}$

*** Méthode de Gauss-Seidel**

On associe $M = D - E$ où $-E$ est la partie inférieure triangulaire de A et $N = F$ la partie triangulaire supérieure de A

Avantage : $x^{(k+1)}$ se calcule sans utiliser toutes les composantes de $x^{(k)}$ à chaque pas

Inconvénient : M^{-1} moins facile à calculer (mais quand même triangulaire)

*** Méthode de relaxation**

Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$ on associe $M = \frac{D}{\omega} - E$

$$N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$$

Remarque 23 : pour $\omega = 1$ on retrouve Gauss Seidel

Thm 24 : Soit A une matrice hermitienne définie positive. Alors $\forall \omega \in]0;2[$, la méthode de relaxation converge

Thm 25 : Pour tout A, la méthode de relaxation ne converge que si $\omega \in]0;2[$.

III Recherche de valeurs propres.

Méthode la puissance

Thm 26 : Soit A diagonalisable de valeurs propres réelles $(\lambda_1 - \lambda_n)$ / $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_{n-1}| < \lambda_n$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ / $\|x_0\| = 1$, l'algorithme suivant

$$\begin{cases} \text{Pour } k > 1 \text{ et } \|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon \\ \quad y_k = A x_{k-1} \\ \quad x_k = y_k / \|y_k\| \\ a = \|y_k\| \end{cases}$$

Entrée : A
Sortie : $a \simeq \lambda_n$
$x_k \simeq e_n$

converge, et ainsi $\lim_{k \to +\infty} \|y_k\| = \lambda_n$ et $\lim x_k = x_\infty$

où $x_\infty = \pm e_n$ vecteur propre associé à λ_n.

Rmq 27 : On peut adapter l'algorithme pour trouver la valeur propre de plus petit module en considérant A^{-1}.
On appelle cela la méthode de la puissance inverse.

IV Analyse fonctionnelle

1) Optimisation d'une fonctionnelle

* Méthode du gradient à pas optimal

DEV 2

On veut trouver un minimum d'une fonctionnelle J sur $\mathbb{R}^n$,
on veut donc résoudre

$$\begin{cases} J(u_k) - \rho(u_k)\nabla J(u_k) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_k - \rho \nabla J(u_k)) \\ u_{k+1} = u_k - \rho(u_k) \nabla J(u_k) \end{cases}$$

Thm 28 : Si J est elliptique, i.e. $\exists \alpha > 0$, $\langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$
Alors la méthode du gradient à pas optimal converge.

Rmq 29 : Toutes les méthodes de type gradient
i.e. $u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla J(u_k)$
veulent résoudre : Trouver $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$

2) Résolution approchée d'équations différentielles

· On veut approcher la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ sur } I \text{ borné} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\ast\ast\ast)$$

* Schéma d'Euler explicite

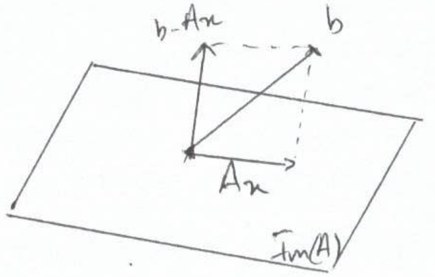
Soit $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ une subdivision de I
on pose la suite
$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = y_0 \\ \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, \tilde{y}_n) \end{cases}$$

Thm 30 : Soit y la solution de $(\ast\ast\ast)$ telle que $y \in \mathcal{C}^2(I)$
Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $L \in \mathbb{R}$ tels que
$\forall t \in I$, $\forall \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ avec $|\tilde{y} - y(t)| \leq \varepsilon$, $|f(t, \tilde{y}) - f(t, y(t))| \leq L |\tilde{y} - y(t)|$
Alors il existe $h^* > 0$ tel que $\forall 0 < h \leq h^*$ et $\forall n \in [\![0 ; m]\!]$
on ait $|y(t_n) - \tilde{y}_n| \leq h \int_{t_0}^{t_n} e^{L(t_n - s)} |y''(s)| \, ds$.

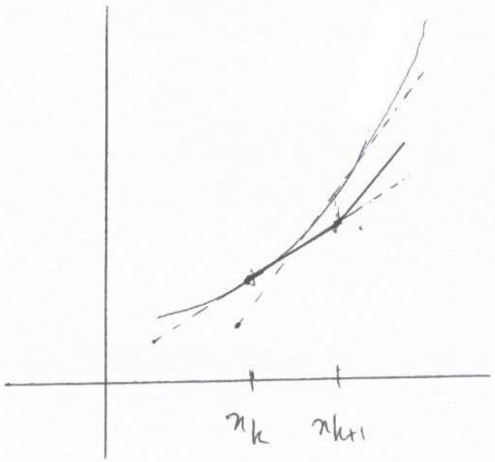
* Schéma d'Euler implicite

La suite que l'on pose est :
$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = y_0 \\ \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \end{cases}$$

Rmq 31 : plus difficile à calculer en pratique mais une meilleure majoration de l'erreur.



Annexe 1 : moindres carrés



Annexe 2 : Euler explicite