

## Contents

1	Leçons d'algèbre et géométrie	2
2	Leçons d'analyse.	7
3	Développements d'algèbre	12
4	Développements mixtes	14
5	Développements d'analyse	15

# 1 Leçons d'algèbre et géométrie

## 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

## 102 - Groupes des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$

## 103 - Conjugaison dans un groupe. Exemple de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60
- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$
- Non isomorphisme exceptionnel

## 104 - Groupes finis. Exemples et applications.

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60
- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$
- Non isomorphisme exceptionnel

## 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60
- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$

**106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.**

- Théorème de Lie-Kolchin
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$
- Non isomorphisme exceptionnel
- Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$
- Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$
- Calcul de  $exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $exp(M_n(\mathbb{R}))$
- Décomposition polaire

**108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$
- Base de Burnside

**120 - Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

- Théorème de Chevalley-Warning et EGZ
- Base de Burnside

**121 - Nombres premiers.**

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- Théorème de Chevalley-Warning et EGZ
- Base de Burnside

**122 - Anneaux principaux.**

- Idéaux premiers de  $K[X, Y]$
- Automorphismes de  $K(X)$

**123 - Corps finis.**

- Théorème de Chevalley-Warning et EGZ
- Non isomorphisme exceptionnel

**125 - Extensions de corps. Exemples et applications.**

- Automorphismes de  $K(X)$
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**127 - Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.**

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

- Automorphismes de  $K(X)$
- Idéaux premiers de  $\mathbb{K}[X, Y]$

**142 - PGCD PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

- Automorphismes de  $K(X)$
- Idéaux premiers de  $\mathbb{K}[X, Y]$

**144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles
- Théorème de Chevalley-Waring et EGZ

**148 - Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.**

- Base de Burnside
- Théorème de Lie-Kolchin

**149 - Déterminants. Exemples et applications.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$

**150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

- Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$
- Décomposition polaire

**151- Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

- Théorème de Lie-Kolchin
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

- Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$
- Décomposition polaire

**153- Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

- Théorème de Lie-Kolchin
- Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$

**154 - Exemples de décomposition de matrices. Applications.**

- Non isomorphisme exceptionnel
- Décomposition polaire

**155 - Exponentielle de matrices. Applications.**

- Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$
- Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

**156 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

- Théorème de Lie-Kolchin
- Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$
- Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$
- Non isomorphisme exceptionnel

**157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

- Décomposition polaire
- Ellipsoïde de John-Löewner

**158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.**

- Décomposition polaire
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie.**

- Sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les translatés
- Théorèmes de Choquet et de Birkhoff

**161 - Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries**

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**162 - Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

Impasse

**170 - Formes quadratiques en dimension finie. Orthogonalité. Applications.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Isomorphisme  $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

**171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Isomorphisme  $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

### **181-Convexité dans $\mathbb{R}^n$**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Théorèmes de Choquet et de Birkhoff

### **190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement**

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Théorème de Chevalley-Waring et EGZ

### **191 - Techniques d'algèbre en géométrie.**

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

## **2 Leçons d'analyse.**

### **201 - Espaces de fonctions.**

- Théorème de Montel
- Théorème de Stone-Weierstrass
- Théorème de Fourier-Plancherel
- Théorème de Banach-Alaoglu

### **203 - Utilisation de la notion de compacité.**

- Théorème de Montel
- Théorème de Stone-Weierstrass
- Théorème de Banach-Alaoglu
- Compacts dans les espaces de Hilbert
- Théorème du point fixe de Brouwer
- Ellipsoïde de John-Löewner
- Théorèmes de Choquet et de Birkhoff

#### **204 - Connexité.**

- 
- Théorème de Lie-Kolchin.
- Théorème du point fixe de Brouwer
- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

#### **205 - Espaces complets. Exemples et applications.**

- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Théorème de Banach-Alaoglu
- Compacts dans les espaces de Hilbert
- Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire
- Théorème de Fourier-Plancherel

#### **206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.**

- Théorème du point fixe de Brouwer
- Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire

#### **208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**

- Théorème de Banach-Alaoglu
- Étude de la convergence faible dans  $l^1(\mathbb{N})$

#### **209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.**

- Théorème de Féjer
- Théorème de Stone-Weierstrass

#### **213 - Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.**

- Théorème de Banach-Alaoglu
- Compacts dans les espaces de Hilbert

**214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.**

- Théorème du point fixe de Brouwer
- Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

**215 - Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**

- Théorème du point fixe de Brouwer
- Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

**218 - Formules de Taylor (impasse)**

- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Théorème de Berstein-Valiron

**219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Théorèmes de Choquet et de Birkhoff
- Théorème de Banach-Alaoglu

**220 - Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.**

- Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire
- Sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les translatés

**221 - Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**

- Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire
- Sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les translatés

**223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Étude de suites récurrentes

**Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**

- Étude de suites récurrentes
- Développement asymptotique de la série harmonique

**226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchées d'équations.**

- Étude de suites récurrentes
- Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire

**228 - Continuité, dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Exemples et applications.**

- Théorème de Sunyer i Balaguer
- Étude de Gamme sur la droite réelle
- Sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les translatés

**229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Étude de Gamme sur la droite réelle

**230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

- Étude de la convergence faible dans  $l^1(\mathbb{N})$
- Compacts dans les espaces de Hilbert
- Expression des zeta(2k)
- Développement asymptotique de la série harmonique

**234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

- Théorème de Fourier-Plancherel
- $F(L_1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$

**235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse.**

- Théorème de Fourier-Plancherel
- Théorème de Sunyer i Balaguer

**236 - Illustrer par des exemples queles méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

- Étude de Gamme sur la droite réelle
- Théorème du point fixe de Brouwer
- Prolongement méromorphe de Gamma

**239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

- Étude de Gamme sur la droite réelle
- Théorème du point fixe de Brouwer
- $F(L_1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$
- Prolongement méromorphe de Gamma

**241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

- Théorème de Berstein-Valiron
- Théorème de Banach-Alaoglu
- Théorème de Montel
- Théorème de Féjer

**243 - Séries entières, propriété de la somme. Exemples et applications.**

- Théorème de Berstein-Valiron
- Expression des zeta(2k)

**244 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

- Étude de Gamme sur la droite réelle
- Prolongement méromorphe de Gamma
- Expression des zeta(2k)

**245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.**

- Prolongement méromorphe de Gamma
- Théorème de Montel

**246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.**

- Expression des zeta(2k)
- Théorème de Féjer

**250 - Transformation de Fourier. Exemples et applications.**

- Théorème de Fourier-Plancherel
- $F(L_1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$

**253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

- Ellipsoïde de John-Löewner
- Théorèmes de Choquet et de Birkhoff

**261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**

Impasse

**262 - Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

Impasse

**264- Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

Impasse

**266 - Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.**

Impasse

### **3 Développements d'algèbre**

Isomorphisme  $SO_3 \simeq PSU_2$

Leçons : 101, 103,106, 108, 125, 127, 151, 158, 161, 170, 191.

**A5 est l'unique groupe simple d'ordre 60**

Leçons : 101, 103, 104, 105.

**Théorème de Burnside sur les groupes résolubles**

Leçons : 102, 103, 104, 121, 127, 14.

**Morphismes continus du cercle dans  $GL_n(\mathbb{R})$**

Leçons : 102, 106, 152, 155, 156.

**Non isomorphisme exceptionnel**

Leçons : 103, 104, 106, 123, 154, 156, 190.

**Lie-Kolchin**

Leçons : 106, 148, 151, 153, 156, 204.

**Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$**

Leçons : 101, 104, 105, 161, 190, 191.

**Sous-groupes d'exposant fini de  $GL_n(\mathbb{C})$**

Leçons : 104, 106, 149, 152 156.

**Base de Burnside**

Leçons : 108, 120, 121, 148.

**Théorème de Chevalley-Waring et EGZ**

Leçons : 120, 121, 123, 144, 190.

**Isomorphisme  $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$**

**Leçons : 170, 171.**

**Idéaux premiers de  $K[X, Y]$**

**Leçons : 122, 141, 142.**

**Automorphismes de  $K(X)$**

**Leçons : 122, 125, 141, 142.**

**Décomposition polaire**

**Leçons : 106, 150, 152, 154, 157, 158.**

## **4 Développements mixtes**

**Calcul de  $\exp(M_n(\mathbb{C}))$  et  $\exp(M_n(\mathbb{R}))$**

**Leçons : 106, 150, 155, 204, 214, 215.**

**Ellipsoïde de John-Löwner**

**Leçons : 149, 157, 170, 171, 181, 203, 219, 229, 253.**

**Théorèmes de Choquet et de Birkhoff**

**Leçons : 159, 181, 203, 219, 253.**

**Sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les translatés**

**Leçons : 159, 220, 221, 228.**

## 5 Développements d'analyse

**Théorème du point fixe de Brouwer**

Leçons : 203, 204, 206, 215, 236, 239.

**Théorème de Banach-Alaoglu**

Leçons : 201, 205, 208, 213,219, 241.

**Théorème de Montel**

Leçons : 201, 203, 205, 241, 245.

**Étude de Gamma sur la droite réelle**

Leçons : 219, 228, 229, 236, 239, 244.

**Prolongement méromorphe de Gamma**

Leçons : 236, 239, 244, 245.

**Étude de la convergence faible dans  $l^1(\mathbb{N})$**

Leçons : 208, 223, 230.

**Point fixe de Banach et Cauchy-Lipschitz linéaire**

Leçons : 205, 206, 220, 221, 226.

**Théorème de Sunyer-i-Balaguer**

Leçons : 204, 205, 218, 223, 228, 235.

**Compacts dans les espaces de Hilbert**

Leçons : 203, 205, 213, 230.

### **Théorème de Stone-Weierstrass**

Leçons : 201, 203, 209, 246.

### **Théorème de Fourier-Plancherel**

Leçons : 201, 205, 234, 235, 250.

$F(L_1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$

Leçons : 234, 239, 250.

### **Théorème de Féjer**

Leçons : 209, 241, 246.

### **Expression des zeta(2k)**

Leçons : 230, 243, 244, 246.

### **Théorème de Bernstein-Valiron**

Leçons : 218, 241, 243.

### **Étude de suites récurrentes**

Leçons : 223, 224, 226.

### **Développement de la série harmonique**

Leçons : 223, 224, 230.