Développements pour groupistes-topologues

par Lucas Toury

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Développements de groupe... **2**

2.1 Isomorphisme $SO_3(\mathbb{R}) \simeq SU_2(\mathbb{C})$ . . . 2
2.2 Théorème de Burnside sur les groupes résolubles . . . 3
2.3 Théorème de Lie-Kolchin . . . 4
2.4 Non-isomorphisme exceptionnel . . . 5
2.5 Sous-groupe finis de $SO_3(\mathbb{R})$ . . . 7
2.6 Morphismes continus du cerlce dans $GL_n(\mathbb{R})$ . . . 8
2.7 A_5 est l'unique groupe simple d'ordre 60 . . . 9
2.8 Automorphismes de $K(X)$ . . . 10
2.9 Théorème de Burnside, sous-groupes d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ . . . 11
2.10 Base de Burnside . . . 12
2.11 Homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ . . . 13

3 ... et d'algèbre **14**

3.1 Idéaux premiers de K[X,Y] . . . 14
3.2 Théorème de Chevalley-Warning et EGZ . . . 15
3.3 Décomposition polaire . . . 16

4 Développements mixtes **17**

4.1 Ellipsoïde de John-Löewner . . . 17
4.2 Calcul de $exp(M_n(\mathbb{C}))$ et $exp(M_n(\mathbb{R}))$ . . . 18
4.3 Théorème de Choquet et de Birkhoff . . . 19
4.4 Sous-espaces vectoriels de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés . . . 20

5 Développements de topologie... **21**

5.1 Théorème du point fixe de Brouwer . . . 21
5.2 Théorème de Sunyer-i-Balaguer . . . 24
5.3 Théorème de Stone-Weierstrass . . . 25
5.4 Théorème de Banach-Alaoglu . . . 26
5.5 Compacts dans les espaces de Hilbert séparables . . . 27
5.6 Étude de la convergence faible dans $l^1(\mathbb{N})$ . . . 28
5.7 Théorème de Fourier-Plancherel . . . 29
5.8 Théorème de Montel . . . 30
5.9 $F(L_1(\mathbb{R}))$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ . . . 31

6 ... et d'autres pour combler les trous **32**

6.1 Étude de Gamma sur la droite réelle . . . 32
6.2 Prolongement méromorphe de Gamma . . . 33
6.3 Calcul des zeta(2k) . . . 34
6.4 Théorème de Féjer . . . 35
6.5 Théorème de Berstein-Valiron . . . 36
6.6 Point fixe de Picard & Théorème de Cauchy-Lipscitz linéaire . . . 37
6.7 Étude de suites récurrentes . . . 38
6.8 Formule d'Euler-MacLaurin et développement de la série harmonique . . . 39

1 Introduction

Voilà un document que j'aurais aimé avoir en débutant mon agrégation. Comme vous pourrez le constater je rassemble ici des développements principalement sur les groupes et la topologie. Les derniers développements d'analyse sont des résultats plutôt faciles et qui se recasent bien pour combler les derniers trous du couplage. Mes impasses étaient systèmes d'équation linéaires en algèbre et toutes les probas en analyse. J'essaye à chaque fois dans les développements de les relier à des groupes finis, des représentations, de la topologie (parfois faible) ou de la topologie algébrique. J'essaye de donner une référence en poly, une dans la littérature, quelques commentaires et les recasages. Ce document a pour but d'évoluer, je l'ai tapé assez vite, il y a donc sûrement des fautes (de frappes, d'orthographe, des oublis de mots ou des phrases qui ne veulent plus rien dire après une malheureuse modification). Je vous préviens du ton familier employé. Si vous prenez le temps de me faire un retour sur le document (pour des modifications ou un simple commentaire) j'en serai ravi. J'espère que vous trouverez votre bonheur ici. Bonne lecture.

2 Développements de groupe...

2.1 Isomorphisme $SO_3(\mathbb{R}) \simeq SU_2(\mathbb{C})$

C'est un développement plutôt joli qui n'est pas très dur et se recase très (très) bien. La version dans NH2G2 II se suffit à elle-même et est bien faite. Les commentaires à la fin aussi sont tout à fait adéquat, j'aime particulièrement le fait de montrer que $\pi_1(SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cela vient de fait que l'isomorphisme de groupes est aussi un homéomorphisme, ce qu'il faut savoir démontrer. Ce n'est pas dur et provient de la bi-continuité automatique pour les compacts si on sait que l'application est à valeur dans un espace séparé. Cela réalise $SO_3(\mathbb{R})$ topologiquement comme l'espace projectif $P_3(\mathbb{R})$ et la 3-sphère comme son revêtement universel. On peut aussi parler de l'illustration de l'assiette tournante. Il faut peut-être aussi savoir qu'il y a une preuve plus courte qui utilise la théorie des groupes de Lie (sans forcément la connaître).

Recasages :

- 101 : Groupe opérant : On fait opérer $SU_2(\mathbb{C})$ par conjugaison sur les quaternions, puis on fait un quotient.
- 103 : Conjugaison dans un groupe : Pareil qu'au dessus
- 106 : Groupe linéaire : Parle d'un lien entre $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$. Mais j'ai plein d'autres développements qui rentrent mieux dans la leçon que celui-là.
- 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe : On utilise que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements. C'est pas grand chose mais dans cette leçon c'est pas évident de trouver.
- 125 : Extension de corps : On peut parler du passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ version matricelle et que l'on fait la même chose de $\mathbb{C}$ pour aller vers les quaternions. C'est bien expliqué dans NH2G2 II avant la partie sur le développement.
- 127 : Exemples de nombres remarquables : Les quaternions.
- 151 : Sous-espaces stables : Un peu léger, mais on utilise la conservation de l'orthogonal.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien : Tout à fait adapter, on parle d'un lien entre deux groupes d'endomorphismes remarquables.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : Étude de $SO_3(\mathbb{R})$ dans des espaces euclidiens c'est plutôt adapté.
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie : Il y'a mieux mais bon, si c'est vraiment la galère ça peut toujours passer. $SO_3(\mathbb{R})$ c'est quand même un groupe associé à une forme quadratique et au début on peut dire qu'on en utilise une sur les quaternions (elle est hermitienne).
- 191 : Techniques d'algèbre en géométrie : Utilisation de l'engendrement, conservation de l'orthogonal (et tous ce qu'on utilise en général dans le dév) pour montrer un isomorphisme sur un groupe de géométrie.

2.2 Théorème de Burnside sur les groupes résolubles

J'ai déjà fait un document complet sur ce développement, les représentations ne sont plus au programme mais je conseille d'en apprendre un peu sur le sujet (parce que c'est passionant) et surtout très rentable de part les reacasages possibles dans les leçons et le fait que si vous savez répondre aux questions vous paraîtrez savant.

Document : Théorème de Burnside $p^a q^b$

2.3 Théorème de Lie-Kolchin

Je suis passé sur ce développement le jour J et je pense qu'il a fait un plutôt bel effet. Je renvoie au super document de Eliot Hecky sur le sujet, il y a un peu près tout (dont les recasages).

Document Lie-Kolchin

Beaucoup de personnes donnent Algèbre corporelle en référence de ce développement. Je trouve qu'il est mieux fait et beaucoup plus clair dans NH2G2. Algèbre corporelle montre juste les résultats annexes (qu'il faut savoir démontrer).

Je veux tout de même faire quelques commentaires en plus de ceux dans le document référence. Il a pour conséquence directe qu'une représentation irréductible (continue) de dimension finie (complexe) d'un groupe connexe résoluble est de degré 1 (ou que si elle n'est pas irréductible alors elle se décomposent en sous-représentations de degré 1 pourvu que le théorème de Maschke fonctionne, on peut donc rajouter la compacité à notre groupe pour que ce soit vrai).
On peut aussi dire qu'un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une droite stable, cela fait penser à des espaces projectifs... je vous laisse aller lire la remarque à la fin de NH2G2 sur le sujet.
Vous remarquerez que la question d'application du théorème en pratique n'est pas résolue à la fin du poly d'Eliot. Déjà il dit que pendant son premier oral, ils ont songé au groupe $SO_2(\mathbb{C})$ ou $SU_2(\mathbb{C})$ (je n'ai pas bien compris lequel ils avaient étudié). En tout cas $SU_2(\mathbb{C})$ ne vérifie pas les hypothèses, en effet il est connexe car homéomorphe à la 3-sphère mais n'est pas résoluble car sinon avec l'isomorphisme classique $SU_2(\mathbb{C})/\{-1,1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$ alors $SO_3(\mathbb{R})$ serait résoluble or c'est un groupe simple non abélien donc impossible. En réalité, quand on pense résoluble dans $GL_n(\mathbb{C})$ on pense à $T_n(\mathbb{C})$ groupes des matrices triangulaires supérieures (ou ses sous-groupes) et le théorème dit précisement qu'un sous-groupe connexe et résoluble est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$... il faudrait conjugué un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$ et "oublié" la matrice de passage... pas facile à faire pour en avoir une description correcte à l'arrivée. Il faudrait donc un groupe qui ne vienne pas directement des matrices mais s'y plonge naturellement. Voici le superbe exemple de Matthieu Romagny (ou peut-être à une variante près) : on considère $\mathbb{C}[X]$ que l'on quotiente par l'idéal (X^n) (on peut se dire que c'est seulement les polynômes de degré $n-1$ mais il y a la multiplication en plus). On regarde alors le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbre de ce quotient. Ce groupe vérifie les hypothèses (et n'est pas trivialement cotrigonalisable) et est en fait même mieux que résoluble car nilpotent.

2.4 Non-isomorphisme exceptionnel

Voilà un joli développement pas trop dur, qui a une belle histoire à raconter et qui montre que l'on a pas peur des PSL.
Le développement se trouve dans NH2G2 II où il y est très bien fait. On peut se passer des quelques détails dans la preuve, par exemple la determination exacte du nombre de classe de conjugaison, du moment que c'est supérieur à deux pour l'un et égal à un pour l'autre c'est bon. D'ailleurs pour montrer que c'est égal à un pour $PSL_3(\mathbb{F}_4)$ on peut aussi faire quelque chose de plus simple, je renvoie au document de CV sur agregmaths.

Un peu d'histoire qui motive ce développement. La classification des groupes finis simples s'est achévée il n'y a pas si longtemps et avec un grand effort collectif. On s'intéresse aux groupes simples non abéliens. Les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont simples certes, mais un peu pour une mauvaise raison, ils n'ont carrément pas de sous-groupes non triviaux. Le premier groupe simple non abélien est A_5 (ou $PSL_2(\mathbb{F}_4)$ ou $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ pour ceux qui préfèrent), mais c'est le seul de ce cardinal à isomorphisme près. Le suivant se trouve à l'ordre 168 et il n'y en a qu'un seul à isomorphisme près encore. On montre donc que $GL_3(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_7)$. On continue, à l'ordre 360 pareil et ainsi de suite. On a donc l'impression que deux groupes simples de même cardinaux sont toujours isomorphes, on cherche donc des contre-exemples et on finit par trouver les deux groupes de ce développement qui sont simples mais pas isomorphes tous les deux de cardinal 20160. Ça peut paraitre beaucoup 20160 mais en fait si on regarde la liste (faite dans théorie des groupes de Félix Ulmer et très éclairante) l'odre 20160 arrive très vite dans la classification (10 ou 11 ème position il me semble). Pour trouver le prochain contre-exemple en revanche il faut aller beaucoup plus loin.
C'est assez important de se poser quelques minutes devant le tableau mentionné précédemment et de se rendre compte de l'importance des groupes spéciaux linéaires et de leur omniprésence. On voit aussi que les A_n sont peux nombreux et que leur cardinal augmentent très vite (c'est évident mais bien de le remarquer). Dans ce tableau il y a un PSL à presque chaque ligne, sauf 3 fois (il me semble) avec A_7, un PSU, et le groupe M_{11} d'ordre 7920, qui est donc le premier groupe sporadique ! Appréciez ce moment.
On peut aussi montrer que $GL_4(\mathbb{F}_2)$ (ou $PSL_4(\mathbb{F}_2)$ c'est au choix) est isomorphe à A_8 mais ce n'est pas évident à démontrer (mais c'est toujours sympa de le savoir).

Ce développement a des liens étroits avec les développements : Théorème de Burnside sur les groupes résolubles, A_5 unique groupe simple d'ordre 60. On peut raconter une belle histoire en les mettant ensemble dans le plan.

Recasages :

— 103 : Conjugaison dans un groupe : C'est bon si on fait une partie sur la simplicité (qui a toute sa place dans la leçon). De plus le développement revient à compter des classes de conjugaison.

— 104 : Groupes finis : Ce sont des groupes finis... et simples en plus. Encore une belle histoire à raconter.

— 106 : Groupe linéaire : C'est bon si on accepte de parler de PSL.

— 123 : Corps finis : Il faut faire une partie algèbre linéaire dans les corps finis, cela permet de mettre en valeur la quantité de groupes qu'ils nous fournissent. De plus à la fin on parle du frobenius ce qui l'encre encore plus dans la leçon.

— 154 : Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents : Le développement revient à compter les classes de conjugaison d'endomorphismes nilpotents.

— 156 : Exemples de décomposition de matrices : On mentionne Dunford dans le développement (sans vraiment l'utiliser) et on utilise Jordan pour les nilpotents. Si on on le fait dans cette leçon c'est sûrement mieux de dire exactement combien il y a de classes de conjugaison.

— 190 : Méthodes combinatoires et dénombrement : On compte des classes de conjugaison... moi j'avais fait une partie dénombrement dans les corps finis dans cette leçon. Peut-être est-ce bien aussi de calculer le cardinal des groupes en question au début et montrer qu'ils sont égaux, quit à passer plus vite sur d'autres aspects (le nombre exact de classes de conjugaison par exemple).

2.5 Sous-groupe finis de $SO_3(\mathbb{R})$

Pour le début je commence comme dans le théorie des groupes de Ulmer jusqu'à arriver au tableau avec les différents cardinaux des stabilisateurs possible. Ensuite la plupart des références montrent que les sous-groupes sont parmi A_4, S_4 et A_5 en les réalisant comme des groupes d'isométries directes, donc on dit juste par exemple : "c'est le groupe des isométries positives du tétraèdre dont on peut montrer qu'il est isomorphe à A_4". Mais ce n'est pas très satisfaisant car on ne finit pas vraiment le boulot. Moi j'ai préféré suivre le document de Guillaume Kineider qui montre directement que c'est A_4, S_4 et A_5 sans passer par de la géométrie. Le seul problème de cette vision c'est qu'elle rentre moins bien dans les leçons de géométrie (mais bon je le mets quand même). Et le vrai désavantage c'est qu'on ne montre pas que ces groupes sont bien des groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ mais juste que les sous-groupes finis sont parmi ceux-là. On n'a pas encore démontré qu'ils existent dans les faits. Pour pallier à cela il suffit de mettre un item juste après le déceloppement en disant que c'est bien le cas et mettre les solides dont ce sont les groupes d'isométries positives, à savoir : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre. Il faut bien se rendre compte de la dualité dans les solides platoniciens. Le dernier problème c'est qu'il faut apprendre la fin par coeur car il n'y a pas de références. Je n'ai pas le temps de tout faire dans ce développement très long. Après avoir fait les premières majorations pour trouver les lignes du tableau je dis qu'en faisant de même on trouve les autres et je ne fait pas la partie pour trouver A_5 mais dit juste qu'on montre que le groupe est simple de cardinal 60 (comme c'est un autre de mes développements je suis béton sur les questions potentielles).

Recasages :

- 101 : Groupe opérant sur un ensemble : On fait opérer un sous-groupe fini sur les pôles de ses éléments au départ puis on utilise la formule de Burnside.
- 104 : Groupes finis : C'est dans le titre.
- 105 : Groupes des permutations : On retrouve les groupes des permutations dans les "vrais" sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ (ceux qui ne sont pas déjà dans $SO_2(\mathbb{R})$).
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : On fait une partie sur l'étude de $SO_3(\mathbb{R})$.
- 190 : Méthodes combinatoires et dénombrement : On ne fait que compter des cardinaux d'orbites et de stabilisateurs tout le long.
- 191 : Techniques d'algèbre en géométrie : Techniques d'algèbres (action de groupe, orbites stablisateurs et autres) qui nous renseignent sur un groupe issu de la géométrie. De plus les sous-groupes que l'on trouve sont des groupes associés à des solides platoniciens donc très géométriques.

2.6 Morphismes continus du cerlce dans $GL_n(\mathbb{R})$

Pour ce développement je renvois au document de Goeffrey Deperle. Pour le jour J, tout se trouve dans FGN algèbre 2 (c'est dit dans le document). C'est bien d'aller regarder une fois comment c'est fait dans FGN parce que le développement est l'assemblement de plusieurs parties d'exercices.

Je n'ai pas grand chose à dire sur ce développement mis à part qu'il comble des leçons pour lesquelles j'ai eu du mal à trouver. Pour prendre un peu de recul, on s'intéresse en réalité aux représentations réelles de dimension finie du groupe compact $\mathbb{S}^1$. Pour le faire, on s'intéresse d'abord aux représentations complexes puis on passe ensuite en réelle. C'est un peu artificiel dans le sens où celles complexes auraient pu suffire, mais pour tenir 15 minutes on fait ça.
Je fais donc quelques commentaires sur le résultat complexe. Tout d'abord on remarque que les matrices sont codiagonalisables (évident via le fait que le cercle est abélien), c'est surtout le caractère diagonalisable qui est important, on retrouve que les représentations irréductibles des groupes abéliens sont de dimension 1 (généralisation du cas fini qui est encore vrai pour les groupes compacts). On voit aussi que les éléments de la diagonale nous sont familiers, ce sont évidemment les éléments de la base hilbetienne de $L^2_{2\pi-per}$ utilisée pour les séries de Fourier. Pour en savoir plus on peut aller regarder la dualité de Pontriaguine d'un groupe abélien localement compact ou encore le théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts.

Recasages :

- 102 : Groupes des nombres complexes de module 1 : On étudie les représentations rélles de dimension finie du cercle.
- 106 : Groupe linéaire : On parle de représentations (mais bon on peut trouver mieux quand même).
- 152 : Endomorphismes diagonalisables : On montre que A est diagonalisable, c'est encore mieux si on fait une partie sur la décomposition de Dunford.
- 153 : Valeurs propres, vecteurs propres : Les morphismes sont reliés aux valeurs propres de A, et on parle des valeurs propres de l'exponentielle.
- 155 : Exponentielle de matrices : On utilise l'exponentielle pour résoudre une équadiff puis on parle des ses valeurs propres en fonction de la matrice de départ et on utilise Dunford.

2.7 A_5 est l'unique groupe simple d'ordre 60

Le développement se trouve dans Un Max de Maths premier exo question 2 à 5, il y a plusieurs manières de la faire mais j'aime bien celle de M. Zavidovique en faisant agir sur les Sylows. Le développement n'est pas dur (il y a moyen d'optimiser la question 5 pour montrer que le morphisme est injectif sans passer par des considérations de cardinal mais en refaisant simplement comme à la question 2, je ne sais pas pourquoi il change la méthode à ce moment là, c'est juste moins clair et plus long). Si on s'arrête à cela le développement est vraiment court, on peut donc montrer que A_5 est simple (question 1). Il me reste ensuite encore un peu de temps et j'en profite pour appliquer le théorème et montrer que $A_5 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_5)$ en calculant simplement les cardinaux et en utilisant la simplicité des PSL. Ce développement permet de montrer notre aisance sur les actions de groupes (en particulier sur les classes à gauche), sur les théorèmes de Sylow et sur le calcul des cardinaux des PSL (il faut donc vraiment être à l'aise sur ces points car sinon le moment des questions ne va pas être agréable).
Pour prendre un peu de recul on peut trouver une action transitive de S_5 sur 6 éléments, (en faisant agir sur les sylows de la même manière). En regardant l'action de S_6 sur les classes à gauche de S_5 (vu comme sous-groupe de S_6 via cette action fidèle) on obtient un automorphisme de S_6. Ce dernier est remarquable car il s'agit d'un automorphisme extérieur de S_6 (abus de langage, il est non trivial dans le quotient par les automorphismes intérieurs), en fait il s'agit du seul automorphisme extérieur car on peut montrer que $Ext(S_6) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'action est donc (à automorphisme intérieur près) la même que celle de $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ sur les 6 droites vectorielles de $\mathbb{F}_5^2$. Un autre développement permet de montrer que pour $n \neq 6$ tous les automorphismes de S_n sont intérieurs. Cela est aussi à relier au fait qu'un sous-groupes d'indice n de S_n est toujours isomorphe à S_{n-1} mais encore mieux, il se voit toujours comme le stabilisateur d'un élément sauf pour le cas $n = 6$. Pour rentrer un peu plus dans les détails on peut regarder ce document qui n'explique pas tout mais éclaire un peu.
Ce développement est à rapproché de celui de Burnside sur les groupes résolubles qui permet de montrer qu'aucun groupe non abélien n'est simple avant le cardinal 60, (30 et 42 sont à traiter à la main via les théorèmes de Sylow). Il faut surtout le rapprocher de celui qui traite du non-isomorphisme exceptionnel. Je vous laisse lire le texte dédié pour comprendre (et voir le tableau des premiers groupes simples dans le Félix Ulmer Théorie des groupes).

Recasages :

- 101 : Groupe opérant sur un ensemble : On fait agir plusieurs fois dans le développement et on parle des théorèmes de Sylow.
- 103 : Conjugaison dans un groupe : On parle des Sylows et de la simplicité des groupes qui a toute sa place dans cette leçon.
- 104 : Groupes finis : On parle de groupes finis et simples en plus. On peut les considérer comme des briques élémentaires des groupes finis (même si le problème de l'extension n'est pas évident). Parler de la classification des groupes finis simples à sa place dans cette leçon (d'un point de vu culturel bien sûr).
- 105 : Groupe des permutations : On parle de A_5, c'est pas mal de mettre ce résultat à côté de celui sur la simplicité des A_n.

2.8 Automorphismes de $K(X)$

Le développement se trouve dans Francinou, Gianella Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 1. Attention ce n'est pas FGN ! C'est un livre bleu et jaune (voir cette photo). Pour un document de référence je propose celui de Matthieu Romagny, le voici. Je n'ai pas grand chose à dire sur ce développement, je ne l'ai pas poussé beaucoup. Je peux simplement dire que le groupes des automorphismes de $\mathbb{F}_5(X)$ est isomorphe à S_5. Plus sérieusemement ce résultat est a rapproché du théorème de Lüroth. Ce développement permet de montrer une bonne maîtrise des anneaux et sert surtout à cela.

Recasages :

- 122 : Anneaux prinicipaux : On utlise le contenu qui a un sens dans les anneaux factoriels et on voit plusieurs fois des anneaux euclidiens apparaître. Le point clé c'est quand même le contenu dans la partie arithmétique qui est demandée dans le rapport du jury il me semble.
- 125 : Extension de corps : K(X) est une extension et dans le développement on montre qu'un élément est transcendant.
- 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée : On montre qu'un polynôme est irréductible et on le transporte via un isomorphisme, c'est sur ça que la preuve repose (outre les détails techniques).
- 142 : PGCD et PPCM : On parle de contenu.

2.9 Théorème de Burnside, sous-groupes d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$

Le développement se trouve dans le Isemann-Pecatte et est très bien fait. Bien prendre la nouvelle version sans les plans sinon vous n'y aurez pas le droit le jour J. On montre d'abord la formule de Vandermonde, puis le résultat classique sur les nilpotents de trace nulle élevés à la puissance, puis enfin le théorème. Cela rempli bien les 15 minutes. Il y a une méthode un peu moins longue et plus directe pour montrer ce théorème mais on utilise pas de déterminant, chose que l'on veut faire pour les recasages. Je n'ai pas grand chose à dire dessus sauf une implication directe (lorsqu'on y pense un peu) qui est : Un groupe infini d'exposant fini n'admet pas de représentation fidèle de dimension finie. Dès fois que l'on vous demande si tous les groupes s'injectent dans $GL_n(\mathbb{C})$ (clin d'oeil Matteo). À ce moment vous prenez votre groupe infini d'exposant fini préféré (le mien c'est $\mathbb{F}_2[X]$).

Recasages :

- 104 : Groupes finis : On montre qu'un groupe est fini... On peut faire une partie groupe fini dans un groupe infini en mettant ce résultat et celui sur les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ (et ceux de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$).
- 106 : Groupe linéaire : On parle de $GL_n(\mathbb{C})$ c'est assez clair.
- 149 : Détermiant : Via le Vandermonde que l'on fait au début. On ne refuse pas un développement qui peut rentrer dans cette leçon.
- 152 : Endomorphismes diagonalisables : On montre qu'un endomorphisme est diagonalisable (et comme il est nilpotent alors il est nul).
- 156 : Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents : Via le lemme que l'on montre sur les nilpotents et l'utilisation que l'on en fait ensuite.

2.10 Base de Burnside

Le document de référence pour ce développement est celui d'Eliot Hecky (mais je recase un peu plus que lui, à tord peut-être), voir ce document, dans la littérature je le prends dans Un max de maths (Sous-groupe de Frattini ou éléments mous). Le développement est fait un peu différemment dans Un max de maths, donc je l'ai presque appris par coeur pour les oraux. Au début de la version d'Eliot, il montre que $(G/H)^H = N/H$ en réalité il y a juste besoin de l'inclusion $\subseteq$ pour continuer, mais bon c'est toujours bien de faire les choses jusqu'au bout.
Pour prendre un peu de recul sur ce développement je conseille d'aller regarder des choses sur le sous-groupe de Frattini, pourquoi pas ici. Une idée assez éclairante sur ce résultat est de se dire que l'on quotiente par les éléments mous, (ceux qui ne servent pas dans les parties génératrices) et qu'on obtient alors un quotient où tous les éléments sont "importants" c'est alors naturel de lui trouver une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. J'ai un exo dans mon recueil d'exo sur les groupes qui parle un peu du sous-groupe de Frattini et calcule celui de $\mathbb{R}$. Un autre résultat à mettre en perspective est le lemme du début où l'on montre qu'un sous-groupe maximal est forcément distingué. C'est une propiété des groupes nilpotents (et on sait que les p-groupes sont nilpotents), en réalité c'est même une équivalence (aller voir théorie des groupes de Josette Calais).

Recasages :

- 103 : Conjugaison dans un groupe : La notion de conjugaison est présente, surtout au début avec le lemme
- 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe : C'est dans le titre.
- 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Dans le rapport on nous demande bien que ce soit la structure anneau qui ressorte et on utilise le fait que $\mathbb{F}_p$ soit un corps pour munir le groupe d'une structre d'ev. C'est peut-être un peu léger mais c'est vraiment l'argument clé de la preuve, on peut le caser dans la partie "cas particulier où n est premier" comme demandé dans le rapport.
- 148 : Dimension d'un espace vectoriel : Je renvois à la justification d'Eliot : "On dispose avec ce développement d'un exemple assez rare où la notion de dimension (finie) d'un espace vectoriel apparaît de manière aussi cruciale dans une démonstration. Le développement rentre très naturellement dans cette leçon, surtout si l'on y développe une sous-partie à propos des p-groupes abéliens élémentaires".

2.11 Homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

Le développement se trouve dans NH2G2 I à la fin dans les applications de la décomposition polaire. Il faut donc maitriser cette notion ainsi que le résultat "l'exponentielle est un homéomorphisme de S_n sur S_n^{++}". Je n'ai pas grand chose à dire sur ce développement si ce n'est qu'il permet de remplir les leçons formes quadratiques ce qui est déjà très bien. Le résultat n'est pas trop mal mais je n'aime pas beaucoup la preuve, elle est un peu trop calculatoire à mon goût, à vous d'essayer de l'améliorer pour qu'elle soit plus sympa à suivre. Attention, souvent ce développement est appelé "isomorphisme" (en particulier sur agregmaths) ! Il s'agit bien d'un isomorphisme d'espaces topologiques donc d'un homéomorphisme et non d'un isomorphisme de groupe, malgré le fait que de part et d'autre il y est des groupes.
On pourra regarder les remarques faites dans le livre à la suite du développement sur la topologie, en particulier la compacité de ces groupes (évident une fois que l'on a montré le résultat). Si l'on est à l'aise avec les représentations et que l'on a envie de faire de belles choses sur les formes quadratiques je conseille d'aller voir le développement sur l'indicateur de Frobenius-Schur de Eliot Hecky en n'oubliant pas de lire les remarques de NH2G2 II sur le sujet (en particulier celle avec un logo d'avion, qui est très jolie).

Recasages :

- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel : Assez évident. Faire une partie sur le groupe associé à une forme quadratique.
- 171 :Formes quadratiques réelles. Coniques : Pareil.

3 … et d'algèbre

3.1 Idéaux premiers de K[X,Y]

Le développement se trouve dans Francinou, Gianella exercices de mathématiques pour l'agrégation (le livre bleu et jaune). Pour les à-côtés, les recasages, je vous renvoie au super document de Matteo Miannay.

3.2 Théorème de Chevalley-Warning et EGZ

Le développement se trouve dans un Max de Maths, on peut présenter les questions I-3 I-4 et la partie II. Le développement n'est pas si facile à retenir (je trouve) il faut bien comprendre pourquoi on pose tel ou tel polynôme afin d'avoir moins de mal à les retrouver. Je n'ai pas tellement de commentaires autour des théorèmes, le deuxième étant déjà une application du premier, à part que c'est un résultat assez sympa de part sa simplicité d'énoncé (je parle de EGZ) mais sa complexité de preuve.

Recasages :

— 120 : Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: On travaille dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ puis modulo n dans EGZ.

— 121 : Nombres premiers : Si on fait une partie sur les corps finis. Ce résultat ressemble d'ailleurs un peu à ceux du type "les p-groupes ont un centre non trivial", on peut essayer de faire une partie qui explique ces propriétés reliées aux nombres premiers.

— 123 : Corps finis : On travaille dans le corps à $q = p^k$ éléments.

— 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires : On arrive à prouver l'existence de racines à un polynôme.

— 190 : Méthodes combinatoires et dénombrement : On est sur les corps finis donc on dénombre forcément et le résultat EGZ est bien dans le style de cette leçon.

3.3 Décomposition polaire

C'est un classique de l'agrégation, aussi bien le résultat que la démonstration (qu'il faut connaître je pense même si on ne le prend pas en développement, au moins les grandes lignes). Je l'ai pris parce que c'est un résultat important (aller voir dans le NH2G2 I les conséquences associé à ce théorème), le preuve est tout de même assez jolie (je trouve) et s'apprend bien (les grandes étapes sont claires). Il faut savoir d'où vient le nom "polaire".
Mais j'aime aussi ce théorème de part les applications topologiques qu'il a. On conclut à la fin que $GL_n(\mathbb{R})$ a même type d'homotopie que $O_n(\mathbb{R})$ car S_n^{++} est convexe (donc contractile). Il suffit d'adapter pour le cas complexe. Si on se demande par exemple quel est le groupe fondamental de $GL_2(\mathbb{R})$ en l'identité (donc celui de $GL_2(\mathbb{R})^+$) c'est donc le même que celui de $O_2(\mathbb{R})$ en l'identité donc de $SO_2(\mathbb{R})$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (car $SO_2(\mathbb{R})$ c'est le cercle). Si on se demande pour $GL_3(\mathbb{R})^+$ alors c'est celui de $SO_3(\mathbb{R})$ qui n'est autre que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf le développement sur l'isomorphisme $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$).

Recasages :
- 106 : Groupe linéaire : On réalise topologiquement $GL_n(\mathbb{R})$ (et $GL_n(\mathbb{C})$).
- 150 : Polynômes d'endomorphisme : C'est un peu forcé mais j'avais besoin de combler un trou dans cette leçon. À un moment, on utilise qu'une matrice est un polynôme en l'autre pour dire qu'elles commutent. C'est très léger mais bon, parfois on fait comme on peut...
- 152 : Endomorphismes diagonalisables : Le théorème spectral est essentiel dans cette leçon et sert dans ce résultat. Un passage clé de la preuve est de dire que deux endomorphismes sont codiagonalisables.
- 154 : Exemples de décomposition de matrices : C'est une décomposition.
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes : C'est dans l'énoncé et au coeur de la preuve.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien : On fait le lien entre 3 ensembles d'endomorphismes remarquables.

4 Développements mixtes

4.1 Ellipsoïde de John-Löewner

Il est très bien fait dans le Isemann-Pecatte (l'édition sans les plans car l'autre est interdite). On peut aussi le retrouver dans le Bernis Bernis mais je l'aime moins. C'est un grand classique de l'agrégation, peut-être trop d'ailleurs. Le jury a pu dire qu'il en avait marre. Au début j'ai choisi ce développement alors que je ne l'aimais pas du tout mais il avait de tellement bons recasages que je l'ai quand même mis dans mon couplage. Il faut savoir répondre à des questions classiques du type : quelle est cet ellipsoïde pour un triangle équilatéral et connaître les généralisations (elles sont faites dans le Isemann-Pecatte). Le développement est assez complet, je choisis en plus de montrer le résultat sur les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$. Cela me permet de moduler le développement selon les leçons, des fois je mets ce résultat (en algèbre globalement) mais pas en analyse où je vais plus insister sur le lemme avec la concavité du log. A contrario, en algèbre, je le mets simplement en item sans le démontrer.
Pour prendre du recul, on peut s'intéresser aux sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$. Ils sont conjugués à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ cela a pour conséquence immédiate la validité du théorème de Maschke pour les représentations réelles de dimension finie des groupes compacts. C'est un joli résultat que l'on peut démontrer via un théorème de point fixe de Kakutani. Plus généralement, on vient de montrer ce résultat sans utiliser l'existence d'une mesure de Haar pour les groupes compacts.

Recasages :

- 149 : Déterminant : On maximise un déterminant.
- 157 : Matrices symétriques réelles ou hermitiennes : Lien avec les formes quadratiques.
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel : C'est presque dans l'énoncé.
- 171 : Formes quadratiques réelles : Pareil.
- 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$: On montre et utilise qu'un ensemble est convexe.
- 203 : Compacité : Il y a des développements mieux que ça dans cette leçon, mais on montre qu'un ensemble est compact pour utiliser l'existence d'un sup atteint par une fonction continue. Puis on classifie les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche : On utilise la compacité pour l'existence et la concavité pour l'unicité d'un extrémum.
- 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes : On utilise la concavité pour montrer l'unicité.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse : On utilise à la fois la convexité d'un ensemble mais aussi la concavité d'une fonction. Après pour colle à l'intitulé en analyse... à vous de bien justifier.

4.2 Calcul de $exp(M_n(\mathbb{C}))$ et $exp(M_n(\mathbb{R}))$

Le développement se trouve dans Un max de maths (partie II : Approche topologique) que l'on peut suivre sans problème car la version est très bien faite. Ce développement relie beaucoup de domaines des maths d'où son intérêt. Tous les commentaires à savoir sont expliqués dans un max de maths.

Recasages :

- 106 : Groupe linéaire : L'exponentielle est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$.
- 150 : Polynômes d'endomorphismes : On étudie l'algèbre des polynômes en un endomorphisme pour mener à bien la preuve.
- 155 : Exponentielle de matrices : C'est dans le titre.
- 204 : Connexité : On utilise un argument de connexité pour montrer la surjectivité.
- 214 : Théorème d'inversion locale, des fonctions implicites : On utilie l'inversion locale.
- 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: On utilise qu'une application est différentiable et l'inversion locale.

4.3 Théorème de Choquet et de Birkhoff

Le développement se trouve dans 131 développement pour l'agrégation, de ce que je me souviens il n'y avait pas de faute. On peut essayer de lier les deux développements en énoncant le résultat comme ceci : "Toute forme linéaire sur les matrices bistochastiques atteint son minimum en une matrice de permutation". Je n'aime pas particulièrement ce développement alors que je pense qu'il cache de beaux résultats. Bien lire les commentaires du livre et en particulier l'application à la résolution d'un problème de transport optimal.

Recasages :

- 159 : Formes linéaires et dualité : Formes linéaires...
- 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$: On parle de points extrémaux et de convexe.
- 203 : Compacité : Le résultat de Choquet traite et utilise de la compacité.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche : On cherche à trouver un minimum.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse : On parle de convexité que l'on utilise pour optimiser.

4.4 Sous-espaces vectoriels de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés

Le développement se trouve dans FGN Algèbre 1, il est appelé "famille libre" ou quelque chose comme ça vers la page 300 il me semble. Il n'est pas particulièrement dur, ni très beau, le résultat ne sert pas à grand chose (je pense) mais il a le mérite de combler beaucoup de trous. Attention par contre en analyse car il donne vraiment l'impression d'être un algébriste et d'en avoir rien à faire de l'analyse (on essaye de le cacher un minimum quand même).

Recasages :

- 159 : Formes linéaires et dualité : On utilise la dualité au début du développement.
- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires : C'est une caractérisation des solutions des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.
- 221 : Équations différentielles linéaires : Voir juste au dessus.
- 228 : Continuité, dérivabilité : L'argument clé est de montrer que la dérivée est encore dans l'espace engendré par les translatés.

5 Développements de topologie...

5.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Voilà un joli développement ! C'est sûrement mon préféré en analyse. Mais attention les apparences sont trompeuses, il n'est pas si facile... C'est un très bon investissement mais il comporte plusieurs défauts. Premièrement, il est très long et vous ne pourrez pas faire tout ce qu'il y a dans le document (ou en tout cas pas de manière propre en donnant l'idée de ce qui se cache derrière). Il faudra donc admettre des choses, à vous de voir quoi. Deuxièmement, bien qu'on se souvienne facilement des grandes étapes, dans le détail, on peut oublier certains points et être très vite bloqué. Ce n'est pas non plus facile de justifier certains points (mais je suis là pour ça). De plus il faut bien connaître les implications et contre-exemples à ce théorème, ce n'est pas comme d'autres développements où on se satisfait de l'énoncé et de la preuve, ici il y a de la culture à avoir autour. Pour finir, par la chose qui est sûrement la plus dérangeante, la référence dans les livres de ce développement est horrible, il faut donc bien vous se l'approprier pour pouvoir retrouver pendant la préparation un détail que vous auriez oublié mais le mieux reste de l'apprendre par coeur. Prendre ce développement c'est construire un lien avec ce théorème qui vous accompagnera toute cette année de préparation.
Maintenant que cela est dit, et si vous êtes encore là, c'est que vous voulez tenter cette aventure que je recommande à 100 %. Tout d'abord, le développement se trouve dans le Gonnord-Tosel de calcul différentiel. Vous allez voir tous le livre est très expéditif, encore plus que le Perrin en algèbre (il faut le faire). La preuve utilise un lemme sur un calul intégral dont il me semble qu'il est seulement justifié comme étant astucieux... on va essayer de remédier à cela. Voici un poly de Théo Gherdaoui. Le développement s'y trouve et c'est globalement comme ça que je le fait mais pas exactement dans cette ordre. Je le présente plutôt comme ce document. Je prefère car l'ordre des idées est plus naturel : d'abord on se ramène au cas C^1 puis on montre qu'il y a une rétraction de la boule sur la sphère et on montre que c'est impossible en posant l'intégrale polynomiale en t dès le début. Car sinon je ne vois pas pourquoi justifier l'étude de Φ_t, en réalité il vaut mieux poser l'intégrale dès le début puis dire que l'on va essayer d'appliquer la formule de changement de variable en montrant que pour t petit, Φ_t est un C^1-difféomorphisme global de la boule ouverte sur elle-même.
Il n'empêche que dans le poly de Théo vous trouverez tout ce dont vous avez besoin pour les contre-exemples, les applications et le reste. Je vous conseille de prendre l'autre document pour suivre l'ordre des arguments et pour la présentation. Parlons un peu de présentation d'ailleurs, je ne sais pas comment les autres faisaient, mais moi j'énonce le théorème dans le cas C^1 uniquement et après je mets un item du style : "Avec le théorème de Stone-Weierstrass on peut le démontrer pour une fonction C^0 seulement". En fait on peut même trouver un polynôme qui n'a pas de point de fixe.
Voici comment ce déroule mon développement : au début je dis que par l'absurde on considère une fonction C^1 de la boule dans elle-même sans point fixe. Ensuite je fais le dessin et explique pourquoi est-ce que l'on peut trouver une rétraction de la boule sur son bord. Je ne fais pas les calculs pour cette étape, un dessin suffit. De toute manière je suis trop long si je fais les calculs et je ne les trouve pas très éclairants. J'explique quand même vite fait comment on procède et dit que la rétraction hérite de la régularité de la fonction c'est-à-dire qu'elle est C^1. On peut aussi préciser que la construction de cette rétraction est une étape classique dans plusieurs preuves du théorème de Brouwer. Ensuite commence la vraie partie de mon développement (vous remarquerez donc que je ne fais qu'un petit bout de ce que les gens proposent, mais je n'ai absolument pas le temps d'en faire plus et cela me prend bien les 15 minutes). On pourra peut-être vous reprochez d'avoir balayé la partie sur la rétraction mais bon... c'est le moins

intéressant et c'est classique normalement. C'est sûr que si on est un robot et qu'on fait tout sans expliquer cela va plus vite mais dans ce cas là le public (à moins de déjà connaître la preuve) ne va rien comprendre. Je pense que c'est mieux de faire les choses pédagogiquement et donc un peu plus lentement en motivant les objets.
Je commence par donner l'intuition en dimension 2 : "Vous ne trouvez pas ça bizarre d'avoir trouvé une telle rétraction ? Regardez en dimension 2 par exemple, comment réussir à amener le disque sur le cercle sans devoir déchirer quelque part ? On a l'impression que c'est impossible." Il faut ensuite arriver à motiver la fonction Φ_t que l'on pose autrement que par l'astuce de calcul intégral du lemme fait dans le Gonnord-Tosel. En réalité on a une transition toute trouvée, on vient de parler de déchirure et quel est le domaine des maths qui s'occupe de ça ? Réponse : la topologie algébrique. Et en réalité qu'est-ce que Φ_t ? C'est juste une homotopie entre l'application identité et la rétraction, l'homotopie étant la base de la topologie algébrique. Il est vrai que l'homotopie est particulièrement facile ici puisque la boule est convexe. On essaye ensuite de dire qu'en prenant t proche de 0 (donc une fonction proche de l'identité), on va essayer d'avoir les bonnes propriétés de l'identité (à savoir que c'est un C^1-difféomorphisme global) tout en gardant des traces de la rétraction. On pose ensuite l'intégrale polynomiale en t en disant que c'est avec ça que l'on va essayer de détecter une absurdité car qui dit C^1-difféo dit changement de variable. Et tout la preuve consiste donc juste à montrer que pour t petit c'est un C^1-difféo de la boule ouverte sur elle-même. On poursuit normalement par le développement. Je pense que de cette manière, on a plutôt bien motivé et introduit les objets qu'on utilise sans que cela fasse trop artificiel.
Comme je le disais, référez-vous au document de Théo pour tout le reste, j'ai juste envie de parler d'une chose qu'il n'y a pas dans le document à savoir les autres preuves de ce théorème. Vous pouvez essayer de vous renseigner sur la preuve par le théorème de Stokes (qui nécessite une fonction C^2 mais comme dit au début on peut même la prendre C^∞), une autre par le lemme de Sperner (qui se fait en dimension 2 mais qui peut se généraliser, aller voir la page d'Eliot Hecky pour voir un document) mais celle-ci est plus du côté de l'algèbre. Il y en a une autre exprès pour la dimension 2 qui se base sur le jeu de Hex et le théorème de Heine, j'ai fait un poly dessus, aller voir le cours 4 pour le lycée Saint-Martin. Enfin la dernière preuve, peut-être la plus courte et qui ne nécessite que de la continuité est celle de topologie algébrique que j'expose ici brièvement. Une rétraction de la boule sur la sphère donne cette suite de composition :

$$\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{B}^n \xrightarrow{r} \mathbb{S}^{n-1}$$

telle que $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. cela se transforme (par fonctorialité) en une suite de composition sur les $n-1$ èmes groupes d'homologies :

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \{0\} \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

telle que $r_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$ or c'est impossible que ce soit l'identité de $\mathbb{Z}$ car i_* est forcément trivial car à valeur dans $\{0\}$. Ceci est absurde et conclut la preuve. Pas mal non ? C'est toujours bien de savoir que lorsqu'on a la rétraction il existe une preuve qui conclut en deux lignes (à peu près la même longueur pour celle avec le théorème de Stokes).

Reacasages :

— 203 : Compacité : On montre un résultat sur la boule qui est compact et plus généralement sur tous les ensembles homéomorphes à la boule (les convexes compacts d'intérieur non vide fonctionnent, voir le poly Théo et la jauge de Minkowski). De plus dans le développement on utilise 3 fois des arguments de compacité (même 4 si on se demande pourquoi l'intégrale est bien définie).

— 204 : Connexité : On utilise un argument de connexité à la fin.
— 206 : Utilisation de la dimension finie en analyse : On utilise 3 fois que la boule est compacte et comme vous le verrez dans le poly de Théo c'est faux en dimension infinie.
— 214 : Théorème d'inversion locale et des fonctions implicites : On utilise le théorème d'inversion globale (c'est même le fil conducteur de la preuve).
— 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: Pareil qu'au-dessus.
— 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables : Là ça ne fera pas l'hunanimité mais dans le rapport il est écrit "les candidats pourront proposer un résultat dont la preuve utilise un calcul d'intégrale" et toute la preuve repose là-dessus... Voilà pourquoi je l'avais mis dedans, c'est original et ça peut passer je pense dans une partie dédiée au changement de variable.
— 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre : C'est peut-être encore plus dur de le justifier là dedans, j'avais d'autre développements au cas où, mais en soit l'intégrale centrale du développement est une intégrale de paramètre t...

5.2 Théorème de Sunyer-i-Balaguer

Je suis passé dessus le jour J. Je n'ai pas grand chose à dire sur ce développement mis à part qu'il est bien, n'est pas si facile et rentre dans des leçons à l'intitulé "simple" et permet donc de paraître intelligent le jour J. Tout ce qu'il faut savoir se trouve dans ce document de Eliot Hecky. Le dévelopement se trouve à la fin du Gourdon Analyse dans les applications du théorème de Baire. Posez-vous bien toutes les questions sur ce développement pour ne pas avoir de zones floues (typiquement pourquoi les composantes connexes de Ω sont de la forme $]a, b[$?). J'ai à peu près les mêmes recasages qu'Eliot sauf 2, un qui est un peu abusé et un autre qui n'existait pas lorsqu'il a passé l'agreg.

Recasages :
- 204 : Connexité : On considère des composantes connexes tout le long.
- 205 : Espaces complets : On utilise le théorème de Baire.
- 218 : Formules de Taylor : C'est là que c'est un peu abusé mais cette leçon est tellement nulle... Déjà pour motiver le développement on peut dire que c'est une sorte d'amélioration de Taylor-Lagrange : on sait que lorsque la dérivée n-ième est nulle alors on est un polynôme (on peut aussi dire qu'on intègre n fois mais on essaye de parler de Taylor le plus possible). On montre que en le demandant juste ponctuellement cela reste vrai. Pendant le développement, lorsqu'on montre qu'une fonction dont la dérivée n-ième est nulle alors on est un polynôme on dit que c'est par Taylor-Lagrange (voir ma dernière parenthèse) puis lorsqu'on dit que deux polynômes dont toutes les dérivées coïncident en un point sont égaux on dit que c'est par la formule de Taylor sur les polynômes. C'est un peu forcé comme recasage, si vous le faites je conseille donc d'avoir un autre développement bien dans le thème.
- 223 : Suites numériques : On est bien dans le thème et ce à plusieurs reprises dans le développement.
- 228 : Continuité, dérivabilité : L'énoncé est dans le thème et la démonstration aussi.
- 236 : Interversion de symboles en analyse : Le jury précise bien que l'inteversion de quantificateurs est dans le thème de la leçon. Or ce que l'on fait, c'est intervertir un "pour tout" et un "il existe" (on montre que le n qui convient est le même pour tout les points). On pourra le mettre dans la même section que le théorème de Heine.

5.3 Théorème de Stone-Weierstrass

C'est un théorème classique et comme je l'utilise dans plusieurs de mes autres développements je me suis dit que le prendre était une bonne idée. La seule référence que je donne c'est Analyse fonctionnelle de Daniel Li, tout est dedans. Je ne fais pas la partie où l'on montre que l'on a une suite de polynômes qui converge uniformément vers la racine carré sur $[0,1]$ parce que sinon je n'ai pas le temps mais si vous allez vite vous pourrez le faire. Moi je le mets avant dans le plan en disant bien que c'est une conséquence d'un théorème de Dini. Il ne faut pas oublier que le cas complexe existe en rajoutant la stabilité par conjugaison. On peut ensuite parler des applications. Il y a bien sûr la densité des polynômes sur un segment (ou un compact de $\mathbb{R}^n$, c'est ce qu'on utilise dans le point fixe de Brouwer) mais aussi des résultats comme la densité de $F(L_1(\mathbb{R}))$ dans $C_0(\mathbb{R})$ qui est un autre de mes développements et qui se trouve aussi dans Daniel Li (on utilise le cas complexe cette fois). On peut aussi citer la preuve que les $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base hilbetienne.

Recasages :

- 201 : Espaces de fonctions : On peut faire une partie sur les fonctions continues sur un compact pour mettre le théorème.
- 203 : Compacité : C'est dans l'énoncé et on utilise deux fois la compacité en extrayant un sous-recouvrement fini.
- 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières : C'est le but du théorème.

5.4 Théorème de Banach-Alaoglu

Voilà un développement pas trop dur en apparence mais qui cache un monde derrière lui. Moi je le prends dans Bernis Bernis, c'est une version pas trop dur, si il me reste du temps à la fin j'explique un peu plus comment fonctionne l'extraction diagonale. Si vous ne voulez pas faire ça, ne pas faire dans les Banach en général, ce qui peut vous exposer à des questions méchantes, on pourra le faire dans le cadre des Hilberts et l'appliquer à une optimisation. Pour ça je vous renvoie au document de Thomas Cavalazzi. Même si vous gardez la version de Bernis Bernis c'est bien de le savoir pour avoir une application à sortir. Pour ne pas être dans la sauce le jour J, il faut pouvoir parler de la topologie faible et topologie faible-*. Si vous ne voulez pas, mieux vaut ne pas prendre le développement. Le but c'est d'inciter le jury à vous parler de ça et que ce soit un bon point pour vous. Typiquement quel est le "vrai" énoncé du théorème avec la topologie faible-* et pourquoi est-ce qu'on prend l'espace séparable (la boule unité devient maitrisable pour la topologie faible-* et on obtient ainsi de la compacité séquentielle). Bref, il faut être à l'aise avec tout ça, en particulier dans le cas des Hilberts et plus généralement sur les questions de réflexivité (théorème de Kakutani entre autre). Dans les applications hors optimisation on peut expliquer que c'est avec ce théorème que l'on montre l'existence d'une mesure de Haar pour un groupe localement compact (c'est joli n'est-ce pas ?), voir ça dans Analyse pour l'agrégation de Zuily-Queffélec.

Recasages :

- 201 : Espaces de fonctions : Ce sont des applications linéaires continues.
- 203 : Compacité : Je ne conseille pas, mais en soit, on explique comment extraire une suite (faiblement) convergente quand les boules ne sont plus compactes.
- 205 : Espaces complets : On travaille dans les Banach et les Hilbert.
- 208 : Espaces vectoriels normés et applications linéaires continues : Banach ; Hilbert et applications linéaires continues.
- 213 : Espaces de Hilbert : Hilberts...
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche : Trouver des extremums potentiels quand les boules ne sont plus compactes. Passe mieux si on fait l'application à l'optimisation dans un Hilbert.
- 241 : Suites et séries de fonctions : On considère une suite d'applications linéaires bornée...

5.5 Compacts dans les espaces de Hilbert séparables

Le développement se trouve dans 131 dévelopements pour l'agrégation, il y a deux fautes dedans. Je ne me souviens plus exactement mais il y en a une au tout début, un carré disparaît et donne tout de suite la conclusion alors qu'en réalité il faut faire une étape de calcul en plus (utiliser l'identité du parallélogramme ou autre chose, mais un truc pas dur sur les normes au carré en tout cas). Une autre erreur se trouve à la fin, il y a un symbole $\sum$ en trop à un moment. Je n'ai pas grand chose à dire si ce n'est de lire les commentaires à la fin, surtout que le fait que des Hilberts séparables il n'y en a pas des masses, dimension finie et sinon un seul de dimension infinie à isométrie près. Ce résultat est à rapproché de celui des compacts dans les Banach fait dans le Bernis Bernis qui généralise celui-là. Essayez de trouver une application du résultat. Sinon l'intérêt essentiel du développement réside dans l'aisance que vous aurez à l'oral (et du fait que je devais trouver un développement dans espaces de Hilbert, sinon j'aurais fait la version dans les Banach).

- 203 : Compacité : C'est dans le titre.
- 205 : Espaces complets : Les Hilberts.
- 213 : Espaces de Hilberts : C'est dans le titre.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes : Tout le long on travaille avec les restes des séries.

5.6 Étude de la convergence faible dans $l^1(\mathbb{N})$

Le développement se trouve dans Bernis Bernis (attention il y a un mauvais recasage dans le livre, ça ne rentre pas dans espaces de Lebesgue). J'ai choisis de faire le preuve plus courte par l'absurde. Le développement est sympa mais pas facile à apprendre. Essayez de comprendre ce que l'on fait ce sera plus facile de le retenir, par exemple la partie du milieu du développement consiste à extraire une suite dont l'essentiel de la norme se concentre "au milieu" pour l'enlever par la suite avec le suite β de l^∞. Pareil que dans le développement de Banach-Alaoglu (je vous y renvoie pour voir exactement ce que je dis) mais il faut être à l'aise sur le fait de parler de topologie faible avec le jury. Il faut (en plus de ce que je dis dans l'autre développement) être capable de montrer que en dimension infinie la topologie faible est strictement contenue dans la forte, par exemple 0 est adhérent à la sphère pour la topologie faible ou encore que tout voisinage contient une droite. C'est donc un résultat remarquable que d'avoir une topologie moins fine strictement mais pour laquelle les suites convergentes sont les mêmes, on appelle ça la propriété de Schur.

Recasages :

— 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues : On parle de toplogie faible donc d'applications linéaires continues. De plus au début on montre que l^∞ est dans le dual de l^1 et on s'en sert par la suite à deux reprises.

— 230 : Séries de nombres réels ou complexes : On fait des séries tout le long.

5.7 Théorème de Fourier-Plancherel

C'est un théorème dont la preuve de manière surprenante me ravit en tant que topologue. Il est fait de différentes manières mais je le préfère dans le Isemann-Pecatte (version sans les plans car l'autre est interdite). On commence par montrer des résultats de la transformée de Fourier sur la classe de Schwartz puis on étend tout ça à $L^2(\mathbb{R})$ par densité (c'est la partie sympa). Il faut donc être un minimum à l'aise avec la classe de Schwartz (semi-normes, métrique, complétude...) car on m'a beaucoup parlé de ça à mon premier oral blanc d'analyse (en particulier les semi-normes).

Recasages :

- 201 : Espaces de fonctions : Si on parle des espaces L^p en particulier L^2.
- 205 : Espaces complets : L^2 est complet, de plus on utilise à la fin des résulats de complétude (prolongement des applications uniforméments continues, image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue, convergence des suites de Cauchy).
- 234 : Espaces de Lebesgue : Moi j'ai fait une partie sur la transformée de Fourier dans cette leçon.
- 235 : Interversion de symboles en analyse : Au début avec les résultats sur Schwartz on fait un théorème de Fubini et de dérivation sous l'intégrale.
- 250 : Transformée de Fourier : C'est dans le titre.

5.8 Théorème de Montel

Le développement que je fais se trouve dans Bernis Bernis avec l'application à la fin qui dit que la métrique n'est pas normable. Il existe d'autres versions qui montre le théorème d'Osgood je renvoie au document de Théo Untrau que je conseille de lire dans tous les cas pour les remarques et les applications du théorème.

Recasages :

— 201 : Espaces de fonctions : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

— 203 : Compacité : On caractérise les compacts pour la topologie de CVU sur tous compacts.

— 241 : Suites et séries de fonctions : Suites de fonctions holomorphes (avec utilisation du théorème de Weierstrass).

— 245 : Fonctions holomorphes : C'est dans le titre.

5.9 $F(L_1(\mathbb{R}))$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$

Je prends le développement dans Analyse fonctionnelle de Daniel Li où il est bien fait. Je finis un peu en avance donc je montre en plus que la transformée de Fourier est injective, l'item de mon plan c'est "La transformée de Fourier va de L_1 dans C_0, elle est injective et son image est dense". Attention en revanche avec le commencement sur le compactifié d'Alexandroff, je suis passé dessus à l'oral et j'ai donc eu des questions de topologie générale et on a pas forcément envie de parler de convergence de suite hors des espaces métriques. Donc je conseille d'apprendre ce qu'est le compactifié d'Alexandroff , la définition de la topologie et ses propriétés mais dans le développement de simplement dire "on compactifie $\mathbb{R}$ en le cerlce via la projection stéréographique", si on vous pose des questions dessus ce sera beaucoup plus simple de répondre et si jamais on vous demande de généraliser, à ce moment vous pourrez dire ce que vous savez sur Alexandroff. Sinon le reste du développement n'est vraiment pas dur et est juste l'utilisation de théorème de Stone-Weierstrass complexe dont on vérifie les hypothèses une par une (d'où la facilité de retenir ce qu'il faut faire). Attention quand même à la petite subtilité de rajouter les constantes pour appliquer le théorème puis de montrer à la fin que finalement on en avait pas besoin, c'est ce qui rend le développement un peu sympa.

Recasages :

— 234 : Espaces de Lebesgue : J'ai fait une partie sur la transformée de Fourier, d'où la place du développement.

— 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre : Pareil si on fait une partie sur la tranformée de Fourier.

— 250 : Transformée de Fourier : C'est dans le titre.

6 ... et d'autres pour combler les trous

6.1 Étude de Gamma sur la droite réelle

Le développement se trouve dans Gourdon Analyse dans les sujets d'études. Je vous conseille de prendre une fonction particulière comme Gamma (like me), zeta... et de la poncer jusqu'au bout, soyez très bon sur deux ou trois fonctions comme ça et ça vous permettra de faire des parties entières dans plusieurs de vos leçons (ou au moins des exemples un peu moins bateau que de dire "$x \to x^2$ est convexe"). J'ai donc choisi le moins original avec Gamma et Zeta mais bon, on fait commme on peut. Le développement n'a rien de particulier c'est typique prépa. Je recommande carnet de voyage en Analystan pour en savoir plus sur Gamma et Zeta ou le livre sur les fonctions spéciales vues par les problèmes.

Reacasages :

— 228 : Continuité, dérivabilité : On utilise le théorème de continuité et de dérivabilité sous l'intégrale. On peut aussi faire une partie fonctions convexes car elles sont automatiquement continue et la vérification de la convexité est simplifiée si elles sont dérivables.
— 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes : Voir les propriétés de Gamma.
— 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables : C'est défini par une intégrale et à la fin on montre la formule classique avec une factorille au numérateur. On peut ausi proposer de calculer $\Gamma(1/2)$.
— 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre : Besoin d'expliquer ?
— 244 : Fonctions usuelles et spéciales : Tout est dit.

6.2 Prolongement méromorphe de Gamma

C'est un résultat qui complète le précédent mais en parlant cette fois de Gamma sur le plan complexe. Il y a d'innombrables versions de ce développement, mais je suis allé au plus simple en prenant celle de Objectif Agrégation (ça se trouve dans la partie exercice). Ils font des références à Analyse pour l'agrégation de Zuily-Queffélec à l'intérieur donc ne pas l'oublier le jour de l'oral. Sinon le développement n'est pas dur. On peut faire la version qui montre la formule de Weierstrass et/ou faire le développement de Bohr-Mollerup et/ou la formule des compléments (plus dur) pour avoir une bonne base sur Gamma. Je recommande carnet de voyage en Analystan pour en savoir plus sur Gamma et Zeta ou le livre sur les fonctions spéciales vues par les problèmes.

Recasages :

- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables : Ça peut le faire si on montre la formule de Weierstrass, sinon c'est pas trop dans le thème.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre : Évident.
- 244 : Fonctions usuelles et spéciales : Pareil.
- 245 : Fonctions holomorphes : Pareil.

6.3 Calcul des zeta(2k)

Voilà mon autre fonction que j'ai décidé d'étudier. C'est intéressant de regarder tous les liens qui existent entre Zeta et Gamma et les applications (en théorie des nombres notamment). C'est donc plutôt un bon choix de couple de fonctions en ce sens. Le développement est fait de manières différentes selon les endroits. Par exemple dans le Gourdon Analyse mais je l'ai pris (et je préfère) dans carnet de voyage en Analystan. Il faut quand même se renseigner un peu sur les nombres de Bernoulli (voir formule d'Euler-MacLaurin et le développement asymptotique de la série harmonique).

Recasages :

- 230 : Séries de nombres réels ou complexes : Clair via la définition de zeta et l'utilisation des séries de Fourier.
- 241 ; Suites et séries de fonctions : Ok si on fait une partie sur les séries de Fourier. En plus dans la preuve on utilise la convergence normale.
- 243 : Série entières, propriétés de la somme : Ok si on fait la version dans FGN Analyse 2, sinon c'est hors sujet.
- 244 : Fonctions usuelles et spéciales : Zeta ?
- 246 : Série de Fourier : On utilise les séries de Fourier pour montrer le résultat.

6.4 Théorème de Féjer

Il y a plusieurs versions de ce développement. En particulier une qui montre Féjer pour $||\cdot||_\infty$ et pour $||\cdot||_p$ mais je trouve que la preuve pour la norme p ressemble à l'autre (avec tout de même un joli argument à la fin de continuité pour utiliser la cas précédent). De plus je trouve que l'on peut vite avoir un trou de mémoire dans tous ces calculs d'intégrales. J'ai donc pris ce développement dans 131 développements pour l'agrégation (il y a une faute dans la partie où on donne la formule de K_n avec le quotient de sinus, il y a une petite erreur dans le calcul). Il est plus simple, on commence par montrer les résultats sur le noyau de Féjer puis on applique tout ça pour montrer le théorème dans le cas $||\cdot||_\infty$. C'est facile, moins probable d'avoir des trous de mémoire, ça déroule bien et si jamais on vous demande dans le cas L^p vous saurez répondre.

Recasages :

- 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières : Si on fait une partie sur les séries de Fourier (ce qui est recommandé).
- 241 : Suites et séries de fonctions : Série de Fourier ?
- 246 : Séries de Fourier : Besoin de justifier ?

6.5 Théorème de Berstein-Valiron

Le développement n'est pas passionnant mais il faut boucher les trous, en particulier dans formules de Taylor. Il se trouve dans Bernis Bernis (aussi dans Éléments d'analyse réelle de Rombaldi mais j'aime moins). On peut faire en plus l'application à la fin pour la fonction tangente. Attention tout de même, je trouve qu'il est assez facile d'oublier ce qu'il faut faire dans le développement car il est très calculatoire.

Recasages :

— 218 : Formules de Taylor : On utilise Taylor reste intégral (comme d'habitude pour montrer qu'une fonction est DSE)

— 241 : Suites et séries de fonctions : Série entière ?

— 243 : Séries entières, propriétés de la somme : C'est dans le titre.

6.6 Point fixe de Picard & Théorème de Cauchy-Lipscitz linéaire

J'ai simplement voulu prendre un développement qui rentre bien dans les equadiffs pour en avoir au moins un potable (parce que sevs engendrés pas les translatés ne fait quand même pas bonne figure). Le développement se trouve dans Bernis Bernis, vous pouvez décider de faire la version pas linéaire mais je trouve que à part l'histoire du cylindre de sécurité (qui est juste pénible) c'est pareil donc je choisis de faire la version linéaire. De plus je rajoute le théorème de point fixe de Picard pour le mettre dans la leçon $u_{n+1} = f(u_n)$ et dans ce cas je speed un peu plus la preuve du théorème. Par contre dans les autres leçons je ne le fais pas et prends mon temps (surtout à la fin, comme c'est bien expliqué dans le Bernis, pour la solution globale).

Recasages :

— 205 : Espaces complets : Ok, si on fait le pont fixe de Picard avant.

— 206 : Utilisation de la dimension finie en analyse : C'est un résultat de dimenion finie et c'est toujours bien de mettre un contre-exemple en dimension infinie quand on dit ça (après j'avoue que j'aurais espérer tomber sur Brouwer dans cette leçon).

— 220 : Illustrer la théorie des EDO : Tout est dit.

— 221 : EDL : Là aussi.

— 226 : $u_{n+1} = f(u_n)$: Comme je l'ai dit, c'est ok si on fait le pont fixe de Picard avant.

6.7 Étude de suites récurrentes

On est vraiment pas dans le passionnant mais il faut bien remplir les leçons 223, 224 et 226. Le développement se fait bien et n'est pas trop dur. Essayez de varier un peu les applications que vous prenez. Je le prends dans Bernis Bernis, si vous voulez un document il y a celui de Eliot Hecky ici.

Recasages :

— 223 : Suites numériques : Suites définies par récurrences.
— 224 : Exemples de développements asymptotiques : Besoin d'expliquer ?
— 226 : $u_{n+1} = f(u_n)$: Me forcez pas à le dire.

6.8 Formule d'Euler-MacLaurin et développement de la série harmonique

Voilà le fond du tiroir, juste pour finir la leçon 224, dommage de ne pas pouvoir faire impasse dessus car j'ai déjà fait sur les probas. Le développement se trouve dans Gourdon Analyse dans les sujets d'études. Si le développement ne vous sert pas ailleurs que dans la 224 et que vous n'avez pas envie de vous investir, il existe une version plus simple, sans la formule d'Euler-MacLaurin, dans le Isemann-Pecatte avec quand même des commentaires sur la généralisation à la fin.

Recasages :

- 224 : Exemples de développements asymptotiques : On l'a pris pour ça.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes : C'est le recasage bonus, pas besoin de justifier c'est assez clair mais il y a quand même de meilleures choses à faire dans cette leçon.