Groupes opérants sur un ensemble. Exemples et applications.

1. Définitions. —

- **Définition 1 :** Soit G un groupe et X un ensemble, une action (à gauche) de G sur X est une application $\phi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ qui satisfait $e \cdot x = x$ et $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$, pour tout g, h dans G et x dans X.
- **Remarque 2 :** Cela revient au même de donner une action de G sur X ou un morpisme de groupes de G dans le groupe des bijections de X.
- **Exemple 3 :** Un groupe agit sur lui-même par translation à gauche et conjugaison. Un groupe agit sur les classes à gauche modulo un sous-groupe.
  Certains groupes sont construits comme agissant sur certains ensembles, comme le groupe S_n sur $\{1, ..., n\}$ ou D_n sur le $n-$gone régulier.
- **Définition 4 :** Soit G un groupe opérant sur X. On définit pour tout $x \in X$: $G \cdot x = \{g \cdot x,\ g \in G\}$ appelée orbite de x, $G_x = \{g \in G,\ g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x et pour tout $g \in G$, $\mathrm{Fix}_g = \{x \in X,\ g \cdot x = x\}$ les points fixes de g.
- **Remarque 5 :** Être dans la même orbite est une relation d'équivalence.
- **Proposition 6 :** G_x est un sous-groupe de G et nous avons la bijection suivante pour tout $x \in X$, $G/G_x \simeq G \cdot x$.
- **Définition 7 :** L'action est dite fidèle si le morphisme de G dans le groupe des bijections de X correspondant à l'action est injectif.
  L'action est dite libre si tous les stabilisateurs sont triviaux.
  L'action est dite transitive si il n'y a qu'une seule orbite.

2. Action et groupes finis. — Dans cette partie G et X sont des ensembles finis

- **Proposition 8 :** Soit H un sous-groupe de G d'indice p avec p le plus petit facteur premier de $|G|$, alors H est distingué dans G.
- **Remarque 9 :** Cette proposition étend le cas bien connu des sous-groupes d'indices 2.
- **Théorème 10 : Cayley :** L'action de G sur lui-même par translation à gauche est fidèle et apparente G à un sous-groupe de S_n (avec n la cardinal de G).
- **Théorème 11 : Équation aux classes :** Soit G un groupe opérant sur X et soient $G \cdot x_1$, ..., $G \cdot x_r$ un système de représentants des orbites. Alors
$$|X| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}.$$
- **Application 12 :** Le centre d'un p-groupe est non trivial.
- **Corollaire 13 :** Il y a deux groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- **Corollaire 14 :** Les p-groupes sont résolubles.
- **Théorème 15 : Cauchy :** Soit p un nombre premier divisant le cardinal de G alors G contient un élément d'ordre p.
- **Théorème 16 : Un théorème de Sylow :** Un groupe agit transitivement sur ses p-Sylows.
- **Corollaire 17 : Développement 1 :** A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60 à isomorphisme près. On a par conséquent les isomorphismes suivants $A_5 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$.
- **Remarque 18 :** C'est le plus petit groupe simple non abélien, le suivant est $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ qui est aussi le seul à isomorphisme près. On en déduit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7) \simeq \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$.
- **Remarque 19 :** Les premiers groupes simples de mêmes cardinaux mais qui ne sont pas isomorphes sont $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$.

3. Action en algèbre linéaire. —

- **Exemple 20 :** L'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P, A) \mapsto PA$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ et deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau.
- **Exemple 21 :** L'application $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P, A) \mapsto AP^{-1}$ définit une action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ et deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont la même image.
- **Exemple 22 :** Soit G le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. L'application $G \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$, $((P, Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$ définit une action. Le rang d'une matrice est un invariant complet.
- **Exemple 23 :** On peut aussi définir une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par conjugaison. L'étude des orbites est la théorie de la réduction.
- **Remarque 24 :** Le déterminant et le polynôme caractéristique sont des invariants pour cette action mais ne sont pas complets.

4. Action géométrie. —

1. *Géométrie.* —

- **Proposition 25 :** L'action de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^1$ est simplement transitive mais l'action sur les paires d'éléments distincts n'est pas transitive (on dit que l'action n'est pas 2-transitive).
- **Définition 26 :** Les orbites pour cette action sont appelées angles orientés.
- **Remarque 27 :** La relation orbite-stabilisateur montre que les orbites sont en bijection avec $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ce qui donne une structure de groupe aux orbites.
- **Remarque 28 :** L'isomorphisme entre $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nous permet de définir une mesure des angles orientés.
- **Théorème 29 : Développement 2 :** Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ non trivial, alors G est isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, A_4, S_4 ou A_5 (avec $2 \leq m \in \mathbb{N}$).
- **Théorème 30 :** L'action de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ par conjugaison sur les quaternions donne l'isomorphisme suivant :
$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$$

- **Remarque 31 :** Cet isomorphisme de groupes est aussi un homéomorphisme. Cela nous donne des rensignements sur $SO_3(\mathbb{R})$ du point de vue topologique.
- **Définition 32 :** On définit un espace affine E comme un ensemble sur lequel agit simplement transitivement un espace vectoriel.
- **Exemple 33 :** Un espace vectoriel est un espace affine.
- **Définition 34 :** Le groupe affine associé à l'espace E est l'ensemble des automorphismes affines de E noté $GA(E)$ munit de la composition. Dans ces sous-groupes remarquables, on peut citer le groupe des homothéties $H(E)$ et des translations $T(E)$.
- **Remarque 35 :** Les groupes A_4, S_4 et A_5 sont appelés groupes cristallographiques car ce sont les groupes d'isométries directes du tétraèdre, du cube et du dodecaèdre.
- **Remarque 36 :** L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur les droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ est transitive mais pas fidèle.
- **Définition 37 :** On définit alors $\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/Z(\mathrm{GL}(E))$. $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur les droites vectorielles.
- **Théorème 38 :** On a les isomorphismes suivants :
  (1) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_2) \simeq S_3$.
  (2) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq S_4$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.
  (3) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_4) \simeq A_5$.
  (4) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_5) \simeq A_5$.
  Tous ces isomorphismes proviennent de l'action fidèle de PGL sur les droites vectorielles.

5. Action linéaire et représentation des groupes finis. — Dans cette partie G est un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

- **Définition 39 :** Une représentation linéaire de G est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. Le caractère associé à ρ est l'application $\chi : g \in G \mapsto tr(\rho(g)) \in \mathbb{C}$.
- **Remarque 40 :** Une représentation linéaire est une action sur un espace vectoriel qui est de plus linéaire.
- **Définition 41 :** Une représentation ρ est dite irréductible si il n'existe pas de sous-espace vectoriel non trivial W qui est stabe par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$ (autrement W est appelé sous-représentation). Un caractère irréductible est un caractère associé à une représentation irréductible.
- **Exemple 42 :** Le groupe S_n a une représentation dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ via les matrices de permutations.
- **Corollaire 43 :** Une action de G sur un ensemble fini X de cardinal n donne une représentation. En effet, cela donne un morphisme de G dans S_n et ensuite de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ via les matrices de permutations.
- **Théorème 44 : Maschke :** Soit ρ une représentation de G et W une sous-représentation. Alors il existe une sous-représentation W' supplémentaire à W.
- **Proposition 45 :** Soit ρ la représentation donnée par l'action de G sur un ensemble fini X comme précédemment et soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel de la représentation. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(\sum_{i=1}^n e_i)$ est clairement une sous-représentation. Soit W une représentation supplémentaire. Si l'action de G sur X est 2-transitive alors W est irréductible.
- **Application 46 :** Cela nous montre que S_n admet en plus des représentations triviale et de la signature, une représentation irréductible de degré $n-1$ provenant de l'action naturelle sur $\{1, ..., n\}$.
- **Théorème 47 :** L'ensemble des caractères irréductibles de G forment une base orthonormale des fonctions centrales de G.
- **Définition 48 :** Le théorème précédent nous permet de définir la table de caractères de G comme une matrice carrée avec en position ij la valeur du $i^{\text{ème}}$ caractère irréductible sur la $j^{\text{ème}}$ classe de conjugaison.
- **Proposition 49 :** Soit $Out(G)$ le groupe des automorphismes extérieurs de G et $Irr(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G. L'application $Out(G) \times Irr(G) \to Irr(G)$, $(\bar{\phi}, \chi) \mapsto \chi \circ \bar{\phi}^{-1}$ définit une action. En d'autres termes, les automorphismes extérieurs de G permutent les colonnes de la table de caractères et par conséquent les lignes aussi, ce qui donne une nouvelle symétrie à la table.

6. Annexe. — Exemple de tables de caractères.

S_3	$\{e\}$	(ab)	(abc)
χ_{triv}	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_{stand}	2	0	-1

S_4	$\{e\}$	(ab)	(abc)	$(ab)(cd)$	$(abcd)$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_{stand}	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon \otimes \chi_{stand}$	3	-1	0	-1	1
θ	2	0	-1	2	0