Retour d'oraux

Analyse :

Couplage tiré : 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse / 228 Continuité et dérivabilité des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

Pas de leçon de topologie à mon grand désarroi, j'aime bien les ensembles convexes mais ne suis pas assez solide sur les fonctions convexes et mes développements ne sont pas très bien dans cette leçon. J'opte donc pour la 228 malgré son côté 1ere année de prépa.

Plan : 1) Continuité (j'essaye quand même de mettre des notions de topologie un peu générales, par exemple en parlant de compact et pas seulement de segment).
2) Dérivabilité dans lequel se trouve mon 1^er^ dev, sous-espace engendré par les translatés. Développement qui parle bien de dérivabilité mais un peu algébrique dans sa preuve, chose que je mentionne pendant ma défense (en espérant qu'il ne le choisissent pas du coup, je le connais bien mais il n'est juste pas hyper passionnant).
3) Théorème fondamentaux : Rolle, TAF, Taylor-Lagrange, Taylor reste-intégral avec mon deuxième développement thm de Sunyer-i-Balaguer (parfait pour cette leçon et montre quand même un bon niveau avec une superbe utilisation de Baire).
4) Continuité et dérivabilité sous l'intégrale avec Gamma en exemple à chaque fois (un autre de mes développement donc je suis béton sur les questions).
5) Fonctions convexes : même si je n'aime pas trop dans R^n, le cas réel je maitrise à peu près. Adéquat via le fait qu'elles sont automatiquement continues et que leur caractère dérivable peut simplifier la démonstration de leur convexité. Toujours Gamma en exemple (convexe et log convexe) et d'autres.

Ils choisissent Sunyer-i-Balaguer (très bon choix), je trace ma route, aucun bug, pas d'hésitation, je finis au bout de 15'09.

Questions développement :
Q : Vous dites que les F_n sont fermés au début, pourquoi ?
R : Image réciproque d'un fermé par une application continue. (On commence en douceur)
Q : Vous dites que si la dérivée n-ième est nulle sur un intervalle alors f coïncide avec un polynôme dessus, pourquoi ?
R : On utilise a formule de Taylor-Lagrange et le terme de reste est donc nul (ou alors on primitive n fois).
Q : Vous prenez une composante connexe de Oméga de la forme]a,b[, pourquoi ?
R : (question classique à laquelle il faut savoir répondre dans ce dev). En effet cela peut paraître surprenant d'avoir une compo connexe ouverte, alors que l'on sait qu'elle sont fermées… mais fermées pour la topologie en l'occurrence celle de Omega qui est la topologie trace. Bref j'écris pas tout mais il faut montrer que les connexes de Omega sont aussi les connexes de R. J'ai fait la démo de manière formelle en topologie générale. Le

Jury m'a fait remarqué qu'il y avait une preuve plus simple dans le cas réel comme les connexes sont connexes par arcs.
Q : Des polynômes qui ont toutes leurs dérivées qui coïncident en un point sont égaux, pourquoi ?
R : Formule de Taylor des polynômes.
Q : Vous avez bien mentionné que la topo sur X était plus compliquée, c'est laquelle ?
R : Question bizarre vu ce que je venais de dire avant. C'est la topo où les ouverts sont les traces de ouverts de R. (acquiescement de la tête)

Questions plan :
Q : Vous avez dit que toute fonction continue sur un compact était unif continue, qu'est-ce que ça veut dire ?
R : J'hésite à répondre l'oral ou à écrire. Puis je me décide à écrire la def, et finalement juste avant d'écrire je dis « c'est quand le delta ne dépend pas de x », il me dit que c'est bon.
Q : Pouvez-vous me donner une fonction continue sur un segment qui ne soit pas uniformément continue.
R : Je fais les gros yeux, je leur dis que pour moi un segment c'est un intervalle fermé borné donc compacte donc c'est pas possible. Ils me disent que c'est ça, je ne suis pas tombé dans le panneau.
Q : Une fonction continue pas unif continue ?
R : x→ x^2
Q : Ok mais une bornée.
R : J'imagine ce qu'il faut répondre, je dis que je vais faire un dessin. Une fonction oscillante dont les périodes d'oscillation sont de plus en plus courtes et j'explique pourquoi c'est pas unif continue, ils me disent ok.
Q : Pourquoi une fonction dont la dérivée est nulle est constante ?
R : Je dis que j'applique Taylo- Lagrange à l'ordre 1. Ils me disent comment on le démontre à l'ordre 1. Après 4 secondes d'hésitation (pas du tout nécessaire) je réponds le TAF.

Exercices : (c'est là que je sens que je vais être une nouille, chose vérifiée en pratique)

On prends la fonction x donne arcsin((1-x)^2) domaine de définition et étudier la dérivabilité.
Je n'ai pas vu la fonction arcsin depuis ma sup et n'ai pas de lien particulier avec elle. Je galère donc un peu à retrouver la représentation graphique (honte à moi). Je finis par donner l'intervalle de définition [0,2] et que je vais donc étudier en 0 (et 2 mais c'est symétrique). Je dérive ma fonction (heureusement que j'avais noté les dérivées usuelles en annexe, je n'ai pas eu peur de me tromper dessus). Je ne connaissais pas le thm de prolongement dans sa version plus générale, je savais que si la dérivée converge alors la fonction est dérivable mais si elle diverge alors elle ne l'est pas (je ne me rappelais pas du sens retour), ils me disent que c'est pas grave, est-ce qu'il n'y a pas un item du plan qui me permettrait de conclure ? Me voilà cherchant dans tout mon plan à la recherche du dit item, mais je ne trouve pas, c'était évidemment encore et toujours le TAF.

Deuxième exo : Soit f dérivable sur un voisinage de 0 tel que f'(0)>0, est-ce que f est croissante sur un voisinage de 0 ? Comme un novice, je me dis que c'est vrai, je dis que j'ai l'intuition que la fonction suit sa tangente un petit peu. Ils m'ont dit de le mettre en équation, chose que j'ai faite. Mais ça ne permettait pas de conclure. On m'a alors demandé en général comment je me représente les fonctions dans ma tête, j'ai répondu régulière genre C^inf (au moins C^1). On m'a demandé de le démontrer quand la fonction est C^1. J'ai réussi à le faire. Il faut donc chercher une fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue (c'était dans mon plan) je prends alors x→ x^2sin(1/x) mais sa dérivée en 0 vaut 0 il faut donc prendre x→ x^2sin(1/x)+x et celle-ci donne le contre-exemple. L'oral se termine sur cette super fonction (super est en trop).

Commentaires : la défense de plan était pile dans les temps, comme le développement et sans bug et les réponses sur le plan rapides. Les exos étaient un peu plus laborieux mais j'ai trouvé le global correct pour voir la leçon (pas passionnante et qui peut vite partir sur des trucs où je suis mauvais).

Algèbre :

Couplage tiré : 120 Anneaux principaux / 153 Valeurs propres, vecteurs propres calcul exact ou approché…

Pas de leçon sur les groupes… snif. L'agreg n'aura pas vu de moment « my time to shine ». En plus ce sont deux leçons à 2 sur une échelle de 1 à 4 (avec 4 les top-leçons) donc pas des leçons nulles mais pas ouf. J'aime bien les anneaux et je n'aime pas les méthodes numériques et il faut en mettre dans la 153. L'une est plus axée Option C et l'autre option B. On s'attend donc à ce que je prenne anneaux. Je lis le rapport du jury des deux leçons au cas où (toujours lire le rapport), je découvre qu'il faut faire de l'arithmétique dans les anneaux, donner des algos de calcul de pgcd, résoudre des équations… bref j'ai pas envie de faire ça. Mes développements sont pas trop mal mais je préfère ceux de la 153 car il y a parmi eux Lie-Kolchin (le banger), le premier développement que j'ai choisi cette année. Je ne connais aucune méthode numérique (que des noms mais pas le détail) mais je me dis que je vais en apprendre pendant la préparation. Je vois à la fin du rapport « on pourra parler de l'application aux représentations », il n'en fallait pas plus pour me convaincre. Je me lance donc dans la 153.

Plan : 1) Définition rapide valeur propres vecteurs propres (très rapide, 8 items en finissant par les différentes équivalence de la diagonalisabilité)
2) Calcul, exemples et applications. Autrement c'est un peu mon fourre-tout. Je parle des nilpotents avec le thm de Burnisde sur les groupes d'exposant fini, je continue avec mon premier dev : morphisme continus du cercle dans GLn(R) (il rentre dans la leçon mais c'est pas violent, je fais donc semblant que c'est tout à fait adéquat pour cette leçon). Viennent les endos trigonalisables qui commutent, alors ils partagent un vecteur propre (donc base de trigona par rec). Donc un groupe abélien de GLn(C) est cotrigo, mais que se passe-t-il si on affaiblit et que l'on prend seulement résoluble et connexe pour compenser un peu. Vient alors naturellement Lie-Kolchin dont je précise bien que c'est avec des valeurs propres et espace propre que l'on va résoudre le problème, donc parfaitement adapté à cette leçon.
3) Localisation des valeurs propres, recherche : Disques de Gershgorin, rayon spectral et toutes les équivalences quand il est < 1.

J'ai pris 30 minutes de ma préparation (les 30 dernières) pour apprendre les démos des résultats Gershgorin et les équivalences rayon spec <1. J'apprends aussi la méthode QR mais je ne la mets pas dans mon plan.
4) Partie sur les représentations des groupes finis (comme dit dans le rapport, je fais pas juste le forceur). Je ne m'étale pas sur les définitions et essaye juste de mettre en valeur les résultats qui s'obtiennent via les valeurs propres ou espaces propres, je conclus en parlant du ker des caractères qui est celui de la représentation (démo lié aux valeurs propres), et que donc les sous-groupes distingués se lisent sur la table des caractères puis je mets la table des caractères de S4.

Ils choisissent sans trop d'hésitation Lie-Kolchin (preuve de bon goût). Je me lance, je trace ma route, sans hésitation quand je finis le thm il est 12'00. Je savais qu'il est un peu court, j'avais prévu cette éventualité avec un beau speech disant que c'est quand même étonnant que le groupe dérivé d'un connexe soit encore connexe, transport d'une notion topologique par une notion algébrique. Je démontre donc cela, il est 14'36 quand je finis.

Questions développement :
Impossible de me piéger sur ce dev.
Q : Pourquoi le n-ième groupe dérivé est distingué ?
R : Les groupes dérivés sont caractéristiques, on procède par rec, en utilisant que si on est caractéristique dans un sous-groupe distingué alors on est distingué, j'explique pourquoi.
Q : Pouvez-vous donner un exemple de groupe pour lequel le théorème s'applique ?
R : Enfin ! My time to shine ! Je vous mets le speech (car j'en suis fier et que c'est mon rapport donc je fais ce que je veux) : « Lie-Kolchin a surtout un intérêt théorique, de part la généralisation qu'on vient de faire et de ses implications. Mais je me suis en effet posé cette question d'application. Tout d'abord quand on pense à un sous-groupe connexe de GLn(C) on pense souvent à SU2(C) car homéomorphe à la 3-sphère. Mais il n'est pas résoluble car sinon avec l'iso classique PSU2(C)=SO3(R) cela voudrait dire que SO3(R) est résoluble or il est simple et non abélien donc impossible. En fait ce n'est pas si évident car le groupe résoluble qu'on connait c'est le groupe des matrices triangulaires supérieures (et ses sous-groupes). Et le thm dit précisément qu'un groupe connexe résoluble est conjugué à un sous-groupe de ce dernier. Il faudrait donc conjugué un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et « oublié » la matrice de passage. On peut donc prendre un groupe qui ne vit pas dans GLn(C) de base mais s'y plonge. On prend alors C[X] que l'on quotiente par l'idéal engendré par (X^n) et on regarde le groupe des automorphismes de C-algèbre. Ce groupe là vérifie les hypothèses, en réalité il est même plus que résoluble car nilpotent » (J'avoue j'étais content quand j'ai dit nilpotent.) Ils avaient l'air d'être convaincu.
Q : Est-ce qu'un groupe abélien est résoluble ?
R : Je suis étonné de la question, cela paraît bizarre avec une question comme ça (sachant que je l'ai dit dans mon dev). J'ai donc dit oui car le premier groupe dérivé est trivial.
Q : Est-ce qu'un groupe abélien vérifie forcément les hypothèses de Lie-Kolchin ?
R : (J'ai compris, en fait c'est une question en deux temps, d'où la simplicité de la première) J'ai donc dit que non, il n'était pas forcément connexe.
Q : Pouvez-vous donner un exemple ?
R : Un groupe abélien fini, car il est donc discret.

(Avec ces 4h de recul, je pense que ce n'est pas évident de trouver des questions sur la résolubilité sans partir trop loin de la leçon, d'où ces questions)

Question plan : Il n'y en a eu qu'une seule.
Q : Comment démontrez-vous le théorème de Gershgorin ?
R : Bon investissement pendant ma préparation, je venais de la lire il y a 30 minutes. Je la ressors sans même réfléchir. Ils acquiescent.
Ils ne m'auront donc pas posé de question de représentations… dommage.

Exercices :
Je vais simplement mettre les énoncés, car il n'y a pas grand chose à dire. Je n'ai pas dit de bêtises, je bloquais un peu, ils me donnaient des pistes, j'avance, je bloque, j'avance… Je n'ai pas particulièrement était brillant mais j'ai montré quelques réflexes.

Ex 1 : Soit P unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que les racines de P soient dans le disque unité fermé. Montrer que toute les valeurs propres non nulles sont des racines n-ieme de l'unité pour un certain n. (Je me disais bien que je connaissais l'énoncé mais pas la preuve, dommage… rip Kronecker)

Ex 2 : Soit A et B des matrices symétriques réelles. On note $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$ les valeurs propres de A et $s_1 \leq \dots \leq s_n$ celles de B. On suppose que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ $x^TAx \leq x^TBx$. Montrer que pour tout i dans $[1,n]$, $l_i \leq s_i$.
(Pour le coup c'était le min max de Courant-Fischer mais que je ne connaissais pas du tout, dommage avec un peu plus de culture j'aurais vraiment bien réussi les exos).

Je finis les exos, il reste 1 minute. On me demande, si je connais des méthodes pour approcher les valeurs propres ?
Je réponds la méthode QR. On me demande de détailler un peu. J'explique l'algorithme et vers quoi ça converge. (Bon investissement pendant la préparation). Il est l'heure et l'oral se termine.

Commentaires : Comme pour l'analyse.

Modélisation :

Couplage : Un texte sur la géométrie et les résultants / Un texte sur un partage de secret via des polynômes.
Je regarde un peu les deux textes, j'aime bien les résultants mais le texte à l'air d'avoir beaucoup de gros calculs donc je prends l'autre.
Je ne vais pas expliquer mon texte, il n'était pas trop dur mais avait quelques subtilités. J'ai essayé de coder tout ce que je pouvais (mais je n'ai pas pris d'exemple hors du texte, peut-être un peu pénalisant mais je voulais être sûr d'avoir les bons résultats à la fin, c'est pour ça). Certains codes étaient un peu raccourcis (car sinon je n'aurais pas eu le temps) mais j'explique ça pendant la présentation.
Je tiens exactement les 35'00.

Questions : Ils me posent quelques questions sur la description d'une attaque que j'ai faite à la fin en me faisant comprendre que je pouvais l'améliorer.

On me fait remarquer que j'ai codé ^(-1) pour prendre l'inverse dans Fp. Comment le fait-on en pratique ? Je dis Bezout. On me dis oui et pour optimiser ? Je dis Euclide étendu.
S'ensuit des questions très portées sur le texte et sur mon code mais dont l'intêret est donc limité dans ce rapport.
Il y a juste un moment où me demande de montrer que l'interpolation de Lagrange n'est pas vraie dans Z/nZ. On se place dans Z/4Z, je réfléchis un peu (je n'avais pas bien compris la question au début) mais si on cherche un polynôme tel que P(0)=0 P(1)=0 et P(2)=1 et bien ça n'existe pas. On finit par d'autres questions sur le texte.

Commentaires : Je ne sais pas trop quoi dire, la modé c'est pas évident de s'auto-évaluer. Y'a des fois où on se sent un peu brouillon (normal on n'a jamais présenté). Je n'ai pas fait une catastrophe mais n'ai pas brillé non plus. Ca aurait pu dérouler un peu plus. On verra bien… (ce que l'avenir nous réservera, on verra bien, vas-y viens on n'y pense pas).