Lucas Toury - ENS Rennes

Énoncé : Caractériser les groupes dont le groupe des automorphismes est trivial (sans utiliser de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels).

Introduction : On commence par remarquer que $\{1\}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ conviennent mais que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne fonctionnne pas (on peut échanger 1 et 2). On se place donc dans le cadre d'un groupe G qui a 4 éléments ou plus.

Étape 1 : Pour tout $x \in G$ on considère l'automorphisme Int_x, comme il doit être l'identité on obtient donc que, pour tout $g \in G$:

$$Int_x(g) = g \Rightarrow gxg^{-1} = x \Rightarrow gx = xg$$

On obtient donc que le groupe est commutatif.

Étape 2 : Maintentant qu'on sait que notre groupe est commutatif, on peut considérer l'automorphisme qui échange x avec son inverse. Étant lui aussi l'identité, on obtient :

$$x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = e$$

avec e l'élément neutre du groupe.

Étape 3 : Soit $a \in G$ avec $a \neq e$. On pose pour tout $x \in G$, $\bar{x} = \{x, ax\}$. On définit la relation xRy si $y \in \bar{x}$. On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence.
On pose $H = \{\bar{x}, x \in G\}$, et on le munit de l'opération interne : $\bar{x}\bar{y} = \bar{xy}$. On vérifie aisément que cela munit H d'une structure de groupe. De plus H est abélien et vérifie pour tout $x \in H,\ x^2 = e$. C'est-à-dire les mêmes relations que G. (Pour les groupes finis, on voit que $|G| = 2 \times |H|$. On donc pu réaliser l'opération car $|G| \geq 2$.)

Étape 4 : On montre que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H$ avec l'application :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H & \longrightarrow & G \\ (0, x) & \longmapsto & x \\ (1, x) & & ax \end{array} \right.$$

Étape 5 : Comme $|G| \geq 4$, alors $|H| \geq 2$. De plus H vérifie les mêmes relations que G, on peut donc refaire le même processus pour montrer qu'il existe un groupe K tel que $H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times K$, soit $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times K$

Étape 6 : On considère $\psi : G \to G$

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times K & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times K \\ ((0,0), x) & & ((0,0), x) \\ ((1,0), x) & \longmapsto & ((0,1), x) \\ ((0,1), x) & & ((1,0), x) \\ ((1,1), x) & & ((1,1), x) \end{array} \right.$$

On a juste permuté les coordonnées de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On peut vérifier que ψ est un automorphisme de G non trivial.

Conclusion : On peut donc répondre à la question en disant que seul deux groupes conviennent, à savoir : $\{1\}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque : Cette preuve est vraiment motivée par celle utilisant les espaces vectoriels. En effet, dans cette dernière, après avoir munit notre groupe d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel, on dit que si la dimension est supérieure à 2, en permuttant deux coordonnées on otient un automorphisme non trivial. C'est exactement ce qu'on a fait ici, on a juste dû travailler un peu plus pour pouvoir faire apparaître les coordonnées de G. On peut aussi voir qu'en répétant l'opération sur K un nombre fini de fois, si G est fini, on trouve que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et donc que pour tout groupe vérifiant $x^2 = e$ admet une puissance de 2 pour cardinal.