Lucas Toury - ENS Rennes

Petit recueil de jolis exercices sur les groupes

1 Introduction

2 Exercices

2.1 $|G|$, $|\mathrm{Ker}(\phi)|$ et $|\mathrm{Im}(\phi)|$

Soit G et H deux groupes et ϕ morphisme de G dans H. Montrer que $|G| = |\mathrm{Ker}(\phi)| \times |\mathrm{Im}(\phi)|$.

Indication : Premier théorème d'isomorphisme.

2.2 $SL_n(\mathbb{R})$

Démontrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal de $GL_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$

Indication : $SL_n(\mathbb{R})$ est le noyau du morphisme déterminant surjectif de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$ et on utilise le premier théorème d'isomorphisme.

2.3 G tel que $x^2 = e$

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Indication : $e = (xy)^2 = xyxy$ d'où $xy = yx$ en multipliant à gauche par x et à droite par y.

2.4 Union de deux sous-groupes

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est sous-groupe de G si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

Indication : Par l'absurde, considérer $x \in K - H$ et $y \in H - K$, comme $H \cup K$ sous-groupe alors $xy \in H \cup K$. Trouver une contradiction en étudiant si $xy \in H$ ou $xy \in K$.

2.5 Groupe de cardinal pair

Soit G un groupe fini de cardinal pair, montrer qu'il existe un élément $x \neq e$ tel que $x = x^{-1}$.

Indication : Poser $F_x = \{x, x^{-1}\}$. Voir que pour $x \neq y$ alors $F_x = F_y$ ou $F_x \cap F_y = \emptyset$. G est la réunion des F_x qui sont diffférents avec $|F_e| = 1$, donc il existe x tel que $|F_x| = 1$ pour que le cardinal soit pair.

2.6 Sous-groupe d'indice 2

Montrer qu'un sous-groupe H de G d'indice 2 est normal.

Soit $x \in G - H$ alors $G = H \cup xH = H \cup Hx$ donc $xH = Hx$.

2.7 Automorphismes intérieur et centre

Soit G un groupe. Montrer que $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$

Indication : Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe (normal) de $\mathrm{Aut}(G)$ (si ce n'est pas déjà su). Puis considérer $f : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Int(G)} \\ g & \longmapsto & \mathrm{Int}_g \end{array} \right.$ avec $\mathrm{Int}_g(x) = gxg^{-1}$. Montrer que f est un morphisme de centre $Z(G)$ puis conclure avec le premier théorème d'isomorphisme.

2.8 Sous-groupe normal et caractéristique

Soit G un groupe et $K \subseteq H$ deux sous-groupes de G. On suppose H normal et que K est caractéristique dans H (pour tout automorphisme ϕ de H, $\phi(K) \subseteq K$).

1. Montrer que K est normal dans G.
2. Montrer que si K est seulement normal dans H ce n'est plus vrai.

Indication :

1. Soit $g \in G$, Int_g est un automorphisme de H car Hnormal donc $\mathrm{Int}_g(K) \subseteq K$, d'où K normal.
2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ normal dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ normal dans A_4 est un contre-exemple.

2.9 Groupes non isomorphes (1)

Démontrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ ne sont pas isomorphes.

Indication : Par l'absurde, f isomorphisme de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, on note $x = f^{-1}(1)$, alors $x = (x/2) + (x/2)$ donc $2f(x/2) = f(x) = 1$ donc $1/2 = f(x/2) \in \mathbb{Z}$.

2.10 Groupes non isomorphes (2)

Démontrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Indication : Par l'absurde, f isomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, on pose $x = f(i)$. Alors $f(i^4) = x^4 = 1$, donc $x^2 = 1$.D'où $1 = x^2 = f(i^2) = f(-1)$ alors que $1 = f(1)$.

2.11 Groupes non isomorphes (3)

Démontrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Indication : Par l'absurde, f isomorphisme de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{Q}^*$. On pose $x = f^{-1}(2)$. Si $x > 0$ alors il existe y tel que $x = y^2$, alors $2 = f(x) = f(y)^2$ donc $\pm\sqrt{2} = f(y) \in \mathbb{Q}^*$, absurde.
Sinon il existe y tel que $x = -y^2$ donc $2 = f(-1)f(y)^2$. Or $f(-1)^2 = 1$ donc $f(-1) = \pm 1$ mais $f(1) = 1$ donc $f(-1) = -1$. D'où $2 = -f(b)^2 < 0$, absurde.

2.12 Nombre fini de sous-groupes

Caractériser les groupes ayant un nombre fini de sous-groupes.

Indication : Montrer que l'ordre de chaque élément est fini (si infini alors infinité de sous-groupes). Écrire G comme l'union des sous-groupes engendrés par un élément. Montrer que l'union est finie car G a un nombre fini de sous-groupes. Donc G est une union finie d'ensembles finis donc est fini. Réciproquement si G est fini il convient car son nombre de sous-groupes est majoré par 2^n.

2.13 Quotient par un sous-groupe maximal

1. Soit G un groupe n'ayant pour sous-groupes que G et $\{e\}$. Montrer que G est d'ordre fini et premier.
2. Soit G un groupe et H un sous-groupe maximal et normal de G. Montrer que H est d'indice fini et premier.

Indication :

1. En considérant $< x >$ montrer que G est cyclique. Si $G = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n non premier alors il y a des sous-groupes non triviaux. Donc $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
2. Correspondance entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H. Donc G/H groupe ayant seulement des sous-groupes triviaux.

2.14 Centre d'un p-groupe

Remarque 2.1. Cet exercice est en deux parties. Si le lecteur connait déjà l'équation aux classes, il pourra directement passer à la dernière question. Sinon on remontre le résultat dans les premières questions.

On dit que G est un p-groupe si $|G| = p^n$, avec p premier et n un entier ≥ 1. Le but de l'exercice est de montrer que le centre d'un p-groupe n'est jamais trivial. Dans tout l'exercice, G est donc fini. (Le centre d'un groupe G noté $Z(G) = \{x \in G,\ \forall g \in G,\ xg = gx\}$.)

On note $Orb(x) = \{gxg^{-1},\ x \in G\}$ et $C_x = \{g \in G,\ gxg^{-1} = x\}$

1. En considérant $\phi : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Orb(x) \\ g & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right.$ et en étudiant son injectivité et sa surjectivité, trouver une relation entre $|G|$, $|Orb(x)|$ et $|C_x|$. (On pourra considérer la relation $g \sim h$ si $g^{-1}h \in C_x$ dont on montrera qu'elle est d'équivalence.)
2. En considérant la relation $x \sim y$ si $x \in Orb(y)$ et en montrant qu'elle est d'équivalence, exprimer le cardinal de G comme somme de cardinaux d'orbites.
3. Caractériser les éléments $x \in G$ tels que $|Orb(x)| = 1$ puis faire apparaître le cardinal de $Z(G)$ dans la formule précédemment trouvée.

4. On considère G un p-groupe. Montrer que son centre est non trivial. (On pourra remarquer que C_x est un sous-groupe de G.)

Indication :

1. ϕ est évidemment surjective, pour la rendre injective on a envie de quotienter par la relation $g \sim h$ si $\phi(g) = \phi(h)$, qui après vérification se trouve être la relation $g \sim h$ si $g^{-1}h \in C_x$. On vérifie que chaque classe d'équivalence a pour cardinal $|C_x|$ (on a en réalité quotienté G par son sous-groupe C_x, remarquer que $Orb(x)$ n'est pas un sous-groupe en général car C_x n'est pas distingué en général). On en déduit le cardinal de l'ensemble quotient qui vaut $|G|/|C_x|$ et donc l'égalité $|Orb(x)| = |G|/|C_x|$.
2. On vérifie que la relation est d'équivalence. Donc G se partionne en union d'orbite, on prend $(x_1, x_2, ..., x_m)$ un système de représentants. Alors $G = \sum_{i=1}^{m} |Orb(x_i)| = \sum_{i=1}^{m} |G|/|C_{x_i}|$.
3. On vérifie $|Orb(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in Z(G)$. Alors $|G| = |Z(G)| + \sum_{i \text{ tq } |Orb(x_i)| \geq 2} |G|/|C_{x_i}|$.
4. Comme C_x est un sous-groupe, il divise le cardinal de G donc $|C_{x_i}| = p^k$ avec $0 \leq k \leq n$, mais dans la somme, comme $|Orb(x_i)| \geq 2$, alors $k \leq n-1$ donc chaque élément de la somme est divisible par p ainsi que $|G|$ donc $|Z(G)|$ est divisible par p, d'où $|Z(G)| \geq p > 1$.

2.15 Groupe d'ordre 15

Soit G un groupe d'ordre 15. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Indication : Avec les théorèmes de Sylow montrer qu'il n'y a qu'un 3-sylow et un 5-sylow. Les éléments de G peuvent être d'ordre 1,3,5,15 et il y a 1 élément d'ordre 1, 2 d'ordre 3 et 4 d'ordre 5 donc 8 d'ordre 15. Soit x d'ordre 15 alors x engendre G qui est donc cyclique d'ordre 15.

2.16 Groupe des automorphismes trivial

Caractériser les groupes G dont le groupe des automorphismes est trivial

Indication : Montrer que G est abélien en considérant les automorphismes intérieurs. Montrer que $x^2 = e$ en considérant l'automorphisme inverse (groupe abélien). Munir G d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel. Lorsque la dimension est supérieure ou égale à 2, trouver un automorphisme non trivial en échangeant deux coordonnées.

2.17 Éléments deux à deux conjugués

Soit G un groupe fini, non trivial, tel que deux éléments de $G - \{e\}$ sont systématiquement conjugués. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque 2.2. Je sais qu'il existe une solution utilisant des outils moins sophistiqués mais je ne l'ai pas encore trouvée...

Indication : Comme tous les éléments de $G - \{e\}$ sont conjugués, ils ont tous le même ordre (fini car G fini). Cet ordre est premier car si $p = nm$ considérer $x^{p/n}$. Donc $|G|$ est divisible par p, de plus soit q un nombre premier différent de p qui divise $|G|$ alors par le théorème de Cauchy il devrait y avoir un élément d'ordre q, absurde. Donc G est un p-groupe. Donc son centre est non trivial, soit g dans le centre, pour tout x dans $G - \{e\}$ il existe k tel que $x = kgk^{-1} = g$ donc il n'y a que deux éléments, e et g. D'où $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.18 Éléments non générateurs, Frattini

Si G est un groupe, un élément g de G est dit non générateur si, pour toute partie A de G n'engendrant pas G, $A \cup \{g\}$ n'engendre pas G. On note $F(G)$ l'ensemble des éléments non générateurs de G.

1. Décrire $F(G)$ pour $G = \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $F(G)$ est un sous-groupe de G.
3. On suppose G fini. On appelle sous-groupe maximal de G tous sous-groupe de G distinct de G et maximal pour l'inclusion. Montrer que $F(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G. (Dans le cas G infini utiliser le lemme de Zorn)
4. Décrire $F(G)$ pour $G = (\mathbb{R}, +)$.

Indication :

1. $\{n+1\}$ partie non génératrice mais $\{n+1\} \cup \{n\}$ oui car contient 1. (Traiter -1 et 0 à part)
2. $e \in F(G)$, évident. Si $g, h \in F(G)$, remarquer que $< A \cup \{gh\} > \subseteq < A \cup \{g\} \cup \{h\} > \neq G$. Puis remarquer $< A \cup \{g\} > = < A \cup \{g^{-1}\} >$.
3. Soit $g \in F(G)$ et H sous-groupe maximal, alors H non générateur donc $H \cup \{g\}$ non plus qui est un sous-groupe contenant H.
   Si $g \notin G$ alors il existe A partie non génératrice telle que $A \cup \{g\}$ est génératrice. On considère $E = \{F \text{ sous-groupes de } G,\ A \subseteq F,\ x \notin F\}$. Montrer que E possède un élément maximal pour l'inclusion (faire par l'absurde puis contredire la finitude de G) (dans le cas infini utiliser le lemme de Zorn). Soit K l'élément maximal, montrer que K est sous-groupe maximal. Sous-groupe : par la définition de E. Maximal : soit $F \subseteq K$ sous-groupe, si $x \in F$, alors $F = G$, si $x \notin F$, alors $F \in E$ donc $F = K$ par maximalité. Donc K sous-groupe maximal de G ne contenant pas x.
4. Soit H sous-groupe maximal de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ abélien, donc H normal et maximal donc il existe p premier tel que $\mathbb{R}/H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $px \in H$. Finalement $x = p(x/p) \in H$, d'où $H = \mathbb{R}$. Donc $F(\mathbb{R}) = \{0\}$.