Lucas Toury - Lycée Saint Martin 28 Septembre 2022

Relation d'équivalence

1 Introduction

Le but des prochaines séances va être de réussir à construire les différents ensembles de nombres que vous connaissez en partant de $\mathbb{N}$ jusqu'à $\mathbb{C}$. Comprendre comment on les construits à partir du précédent, mais aussi pourquoi est-ce qu'on le fait.
Pour faire ces différentes constructions nous aurons besoin d'un outil fondamental en mathématiques que sont les relations d'équivalences.

2 Relation d'équivalence

Définition 2.1. Une relation binaire f sur E est la donnée d'une application :

$$f: \quad E \times E \quad \to \quad \{0, 1\}$$

Il faut se dire que l'on prend deux éléments de E et que l'on veut tester quelque chose. f renvoie 1 si c'est chose est vérifiée et 0 sinon.

Remarque 2.1. On peut aussi voir ça comme un sous-ensemble $D \subseteq E \times E$ où $(x, y) \in D$ si $f(x, y) = 1$.

Exemple 2.1. Donner des exemples de relation binaire.

Remarque 2.2. Dans la suite on parle de relation d'équivalence et dans ce cas on note $x\mathcal{R}y$ si $f(x, y) = 1$ et on dit que x est en relation avec y.

Définition 2.2. Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E qui est à la fois :
1) réflexive, càd :

2) symétrique, càd :

3) transitive, càd :

Exemple 2.2. Donner des exemples de relation d'équivalence.

Donner l'exemple d'une relation binaire symétrique, réflexive mais pas transitive.

Donner l'exemple d'une relation binaire symétrique, transitive mais pas réflexive.

Donner l'exemple d'une relation binaire réflexive, transitive mais pas symétrique.

3 Classe d'équivalence

Définition 3.1. On définit la classe d'équivalence d'un élément x de E, notée $[x]$ ou $\bar{x}$ comme l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$:

$$[x] = \{y \in E | y\mathcal{R}x\}$$

On appelle représentant de $[x]$ n'importe quel élément de $[x]$, et système de représentants des classes toute partie de E qui contient exactement un représentant par classe.

Exemple 3.1. Donner un système de représentants pour une relation d'équivalence choisie.

Propriété 3.2. L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

Démonstration

4 Ensemble quotient

Définition 4.1. Étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, l'ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$, est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ des classes d'équivalence :

$$E/\mathcal{R} = \{[x] \in \mathcal{P}(E) | x \in E\}$$

Définition 4.2. On a donc une application canonique p :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Remarque 4.1. L'idée derrière ces appellations est de travailler dans l'ensemble quotient comme dans E, mais sans distinguer entre eux les éléments équivalents selon $\mathcal{R}$.

5 Exercices

Exercice 1 (● ○ ○). Déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant : "Si la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est symétrique et transitive, alors elle est réflexive car pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ et comme maintenant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, par transitivité, $x\mathcal{R}x$".

Exercice 2 (● ○ ○). Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalences :

1) Sur $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B$ si $(A = B)$ ou $(A = \bar{B})$.

2) Sur $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B$ si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 3 (● ○ ○). Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E qui est réflexive et transitive.
La relation $\mathcal{S}$ définie par $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$ est-elle une relation d'équivalence ?
La relation $\mathcal{T}$ définie par $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x)$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 4 (● ○ ○). Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $X\mathcal{R}Y$ si $X \cup A = Y \cup A$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire ses classes.

Exercice 5($\bullet\bullet\circ$). On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout couple $(z,z')\in\mathbb{C}^2$:

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z|=|z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $z\in\mathbb{C}$. Décrire géométriquement la classe de z modulo $\mathcal{R}$.

3. Pour chaque classe d'équivalence, trouver un représentant qui appartient à $\mathbb{R}_+$, et en déduire une bijection entre ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathcal{R}}$ et $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6($\bullet\circ\circ$). Soit f une application de E dans F. On définit la relation $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x,x')\in E^2$:

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x)=f(x').$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que l'application suivante est injective :

$$f : {}^{E}/_{\mathcal{R}} \to F,\ \bar{x}\mapsto f(x).$$

Exercice 7($\bullet\circ\circ$). Dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow xy=zt.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle d'équivalence ? Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?
Même question avec :

$$(x,y)\mathcal{S}(z,t) \Leftrightarrow xy=zt \text{ et } xz\geq 0.$$

Exercice 8($\bullet\bullet\circ$). On se place dans le plan $\mathcal{P}$ d'origine O.
La relation " $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow O,M,N$ sont alignés" est-elle d'équivalence ? Même question en remplaçant $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}-\{O\}$.

Exercice 9($\bullet\circ\circ$). Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $\theta\mathcal{R}\phi$ si $\exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\phi+2k\pi$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire ${}^{\mathbb{R}}/_{\mathcal{R}}$.

Exercice 10($\bullet\circ\circ$). Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y$ si $x+y$ est pair. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décire ${}^{\mathbb{Z}}/_{\mathcal{R}}$.

Exercice 11($\bullet\bullet\bullet$). (Clôture transitive)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On appelle clôture transitive de $\mathcal{R}$, notée $\bar{\mathcal{R}}$, la relation définie sur E par $x\bar{\mathcal{R}}y$ si :

$$\exists n\in\mathbb{N}, \exists(x_0,x_1,x_2,...x_n)\in E^{n+1}, (x=x_0)\wedge(x_0\mathcal{R}x_1)\wedge(x_1\mathcal{R}x_2)\wedge...\wedge(x_{n-1}\mathcal{R}x_n)\wedge(x_n=y)$$

"$\wedge$" signifie "et" en logique.

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique, alors la clôture transitive de $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que $\bar{\mathcal{R}}$ est la plus petite relation transitive contenant $\mathcal{R}$ au sens où :
$x\bar{\mathcal{R}}y \Rightarrow x\mathcal{T}y$ pour toute relation transitive $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{R}$. ($\mathcal{T}$ contient $\mathcal{R}$ si :
$x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{T}y$.)