Lucas Toury - Lycée Saint Martin 28 Septembre 2022

De $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$

1 Introduction

On a réussi à munir $\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe avec $+$. On va essayer maintenant de considérer $\times$.
On pourrait demander à ce que $(\mathbb{Z}, \times)$ soit lui aussi un groupe, mais il est dommage de complètement oublier l'addition que l'on vient de bien construire. On va donc regarder les propriétés du triplet $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et en en demandant certaines autres on va construire $\mathbb{Q}$.

2 Anneau

On considère un ensemble A muni de deux opéartions internes que l'on note $+$ et $\times$. Ces opérations sont notées comme ça dans le cas général mais ne signifie en aucun cas que l'on considère l'addition et la multiplication usuelles, on aurait très bien pu les noter $*$ et \$.

Définition 2.1. Soit $(A, +, \times)$ un triplet avec A un ensemble et $+$, $\times$ deux opérations internes. On dit que A est un anneau (unitaire) si :
1) $(A, +)$ est un groupe abélien. Le neutre de $+$ est noté 0 et l'inverse de a est noté $-a$.
2) La loi $\times$ est associative, càd :

3) La loi $\times$ possède un élément neutre noté 1, càd :

4) la loi $\times$ est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi $+$, càd :

Règles de calcul : Montrer que :
1) $0 \times a = a \times 0 = 0$

2) $(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$

Définition 2.2.
1) Lorsque la loi $\times$ est commutative, on dit que A est commutatif.

2) Dans un anneau A, tous les éléments $a \in A$ n'admettent pas forcément d'inverse pour la loi $\times$. Lorsque c'est le cas, on dit que a est inversible, et on note son inverse a^{-1}.

3) Un anneau A est intègre s'il est commutatif, et si l'équation $a \times b = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

Propriété 2.3. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre.

Démonstration

Exemple 2.1. Donner des exemples d'anneau.

Remarque 2.1. On voit donc que une propriété que l'on peut demander en plus à $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est

C'est ce que va justifier la nouvelle définition :

Définition 2.4. On dit que $(A, +, \times)$ est un corps si c'est un anneau commutatif dans lequel

On veut donc partir de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et fabriquer un corps. C'est de cette manière que l'on va créer $\mathbb{Q}$.

Construction de $\mathbb{Q}$ *:*

3 Exercices

Exercice 1 ($\bullet \circ \circ$). Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \leq 1$ tel que $x^n = 0$.
On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents. Montrer que xy est nilpotent.
On ne suppose plus A commutatif. Soit u et v tels que uv soit nilpotent, montrer que vu est nilpotent.

Exercice 2 ($\bullet \bullet \circ$). Soit A un anneau dans lequel pour tout $x \in A$, on a, $x^2 = x$. Montrer que, pour tout $x \in A$, $x = -x$ puis montrer que A est commutatif.

Exercice 3 ($\bullet \bullet \circ$). Soit A un anneau. On appelle caractéristique de A le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot 1 = 1 + 1 + ... + 1 = 0$. Si un tel entier n'existe pas on dit que l'anneau est de caractéristique nulle. Dans la suite, on supposera que A est de caractéristique finie n.
Montrer que pour tout $x \in A$, $n \cdot x = 0$.
Montrer que si A est intègre alors n est un nombre premier.

Exercice 4 ($\bullet \bullet \bullet$). Soit A un anneau (commutatif) intègre fini. Montrer que A est un corps.