Exercices de recherche

1 Exercice Algèbre : DRolle de proposition !

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n qui possède n racines réelles. Combien de racines le polynômes P' a-t-il ?

2 Exercice Algèbre : L'ai-je mis dans le grenier ou dans la grange ?

Trouver tout les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.

3 Exercice Analyse : Cauchy, un homme fermé et borné ?

Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Montrer que (u_n) converge.

4 Exercice Analyse : Ô César, reviens aux bases et sépare bien tes sommes !

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.
Montrer que $v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}$ converge aussi vers l.

5 Exercice Topologie : Parole d'un Sup à son prof : comment être à la fois ouvet et fermé ?

Montrer que dans $(\mathbb{R}, |.|)$ les seules parties ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

6 Exercice Topologie : Citation : Dûr, dûr mais un beau dessin vaut mieux que de longues discussions

On se place dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées noté $E = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que l'on munit de $||.||_\infty$.
$A_1 = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$. Est-ce que A_1 est une partie fermée de $(E, ||.||_\infty$?
$A_2 = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$. Est-ce que A_2 est une partie ouverte de $(E, ||.||_\infty$?
On se place maintenant sur $F = C([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $F \subset E$.
$A_3 = \{f \in E | \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, ||.||_\infty$?