Lucas Toury - Lycée Saint Martin 14 février 2024

Comment différencier un ballon d'une bouée ?

1 Introduction

1.1 Avertissement

Attention, dans ce document, aucune rigeur n'est prétendue ou attendue, les explications et "démonstrations" seront faites uniquement de manière imagée. Il s'agit ici de faire sentir l'outil, de convaincre et non d'un cours qui mènerait à des outils beaucoup trop avancés pour des lycéens.

1.2 Motivations

Nous avons vu la notion d'homéomorphisme, c'est l'isomorphisme pour la structure d'espace topologique. Deux espaces sont homéomorphes si se sont les mêmes à déformation continue près (il faut que la déformation soit réversible). De manière visuelle, cela veut dire qu'il est interdit de déchirer ou de recoller notre espace. Par exemple, on a l'impression qu'un cube et une sphère sont homéomorphes, et c'est le cas, de même qu'une tasse et un cercle (la anse de la tasse est pleine). Dans ces cas là, il suffit d'expliciter l'homéomorphisme. Mais lorsqu'on l'on veut montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, il faut trouver des caractéristiques, appelées invariants, de l'espace qui se conserve au cours des transformations continues et montrer que les deux espaces n'ont pas les mêmes.

Dans la suite on se place dans les espaces vu précédemment, les espaces métriques. On notera E plutôt que (E, d) l'espace métrique. On appelera E simplement un espace.

2 Différencier un segment et un cercle

2.1 Un premier invariant, la connexité par arcs

On vient de dire que l'on ne pouvait pas déchirer ou recoller notre espace pendant une déformation. L'idée naturelle venant de ça est de dire que le nombre de morceau de notre espace est un invariant. Par exemple un cercle et l'ensemble formé par deux points distincts ne sont pas homéomorphes car l'un est en un seul morceau alors que l'autre en a deux. Essayons de formaliser un peu l'idée.

Définition 2.1. Soit E un espace. On appelle chemin, une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$. $x := \gamma(0)$ est appelé origine du chemin et $y := \gamma(1)$ est appelé extrémité.

Définition 2.2. Soit x, y deux points d'un espace E. On dit que x et y sont reliés s'il existe un chemin γ de E d'origine x et d'extrémité y.

1. Pourquoi y'a-t-il une symmétrie des rôles lorsqu'on dit x et y sont reliés mais pas dans le définition donnée ?
2. Dans $\mathbb{R}$, donner un chemin reliant 0 à 1.
3. Dans $\mathbb{R}$, donner un chemin reliant a à b.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, donner un chemin reliant a à b.
5. Dans $\mathbb{S}^1$, donner un chemin reliant 1 à -1.

On a donc maintenant naturellement la notion de d'espace en un seul morceau. Ce sont les espaces où deux points quelconques sont reliés.

Définition 2.3. Un espace E est dit connexe par arcs, si tout couple de points de E est relié.

1. Donner des exemples d'espaces connexes par arcs où tout les points sont reliés par des lignes droites.
2. Donner des exemples d'espaces non connexes par arcs.
3. Donner des exemples d'espaces connexes par arcs où certains points ne sont pas reliés par des lignes droites.

Remarque 2.1. Point culture : Le fait d'être relié est une relation d'équivalence, les classes d'équivalences pour cette relation sont appelées les composantes connnexes par arcs de l'espace. Le nombre de composantes correspond au nombre de morceaux de l'espace (même si des choses étranges peuvent arriver avec des espaces connexes non connexes par arcs, aller voir la courbe du topologue).

Maintenant qu'on a défini la notion il faut montrer qu'elle se conserve lors d'une déformation. En clair il faut montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est encore connexe par arcs.

Propriété 2.4. L'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Démonstration. Soit E un espace connexe par arcs, F un espace et f une application continue de E vers F. Soit x_F et y_F des éléments de $f(E)$. Alors il existe x, y dans E tels que $f(x) = x_F$ et $f(y) = y_F$. Soit γ un chemin reliant x et y dans E, alors $f \circ \gamma$ est un chemin de $f(E)$ reliant x_F à y_F, donc $f(E)$ est connexe par arcs. □

Remarque 2.2. Attention ! Dans la propriété précédente on ne dit pas que F est connexe par arcs mais simplement l'image de E par f. Cela ne pose pas de problème car un homéomorphisme est surjectif et sa réciproque aussi.
De plus la réciproque est fausse, ce n'est pas parce que l'image est connexe par arcs que l'espace de départ l'était.

1. Donner l'exemple d'un espace E connexe par arcs, d'un espace F non connexe par arcs et d'une application f continue de E vers F.
2. Donner l'exemple d'un espace E non connexe par arcs, d'un espace F connexe par arcs et d'une application continue f de E vers F.

Propriété 2.5. Soient E et F sont deux espaces homéomorphes. E est connexe par arcs si et seulement si F l'est.

Démonstration. Cela est assez évident au vu de la proposition et de la remarque précédente mais mieux vaut trop détailler.
Comme E et F sont homéomorphes, il existe une application continue f de E vers F bijective qui est bi-continue. En particulier l'application est continue et surjective donc si E est connexe par arcs alors $f(E) = F$ l'est aussi. L'autre sens est identique en considérant la réciproque de f elle aussi contine et surjective. $\square$

1. Montrer que deux points distincts et une droite dans $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Montrer que $[0, 1]$ et $\mathbb{S}^1$ ne sont pas homéomorphes.
4. Montrer que $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
5. Comment montrer que $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes ? (C'est une autre caractéristiques qui a été déjà vue)
6. Comment différencier un anneau et un disque dans $\mathbb{R}^2$?

2.2 Les limites

La connexité par arcs nous a permis de différencier certains espaces topologiques mais pas dans la dernière question. On voit que notre invariant est certe utile mais pas très précis. Il voit les morceaux de notre espace mais pas ce que se passe à l'intérieur de ceux-ci. On sent bien que un anneau et un disque sont deux choses différentes. La connexité par arcs ne le voit pas mais pourtant on sait bien qu'un anneau à un trou alors que le disque non. Mais comment arriver à formaliser cette notion de trou ?

3 Différencier un ballon et une bouée

3.1 Les lacets

La notion qui va intervenir et dont a l'impression qu'elle va détecter ce trou est celle des lacets.

Définition 3.1. Un lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité x_0 sont confondues. On dit que le lacet est basé en x_0.

Remarque 3.1. En clair, c'est un chemin qui revient au point de départ. On peut aussi le formaliser d'une manière élégante en disant que c'est une application continue du cercle dans notre espace mais cela revient au même et on gardera l'intervalle $[0, 1]$ comme espace de départ.

1. Donner des exemples de lacets dans différents espaces.

2. Donner deux lacets dans $\mathbb{S}^1$ partant de 1 et passant par -1.

Remarque 3.2. On voit clairement qu'un lacet est condamné à rester dans la composante connexe du point de départ.

Pourquoi est-ce le bon objet à étudier ? Pour l'anneau on voit qu'un lacet qui fait le tour du trou ne peut pas être rétracter. Il restera toujours autour du trou. Alors que pour le disque, on peut tirer sur un lacet pour le faire rétrécir et il finira par n'être plus qu'un point. C'est ce qui donne l'impression que les lacets sont les bons objets à étudier, dans le disque il n'y a qu'un seul type de lacet alors que ce n'est pas le cas dans l'anneau.

1. Faire un dessin des lacets dans le cas du disque et de l'anneau.
2. Combien y'a-t-il de type de lacet dans $\mathbb{R}$ selon vous ?

3.2 Homotopie

On voit que pour bien formaliser cette notion on a besoin de tirer sur les lacets, c'est-à-dire de les faire bouger dans notre espace pour voir combien il y a de lacets vraiment différents. Il faut donc introduire une notion de déformation des lacets que l'on va appelée homotopie.

Définition 3.2. Soit E un espace et γ_0, γ_1 deux lacets basés en x_0. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$ et pour tout $s \in [0,1]$, $H(0,s) = H(1,s) = x_0$.

1. Que représente le premier $[0,1]$ dans l'espace de départ pour H.
2. Le deuxième ?
3. Pourquoi impose-t-on $H(0,s) = H(1,s) = x_0$?

En clair une homotopie de lacets n'est rien d'autre que le film de la déformation du premier lacet vers le deuxième et tel que si on met pause à un moment l'image à l'écran est un lacet basé en x_0.

3.3 Groupe fondamental

On pourrait s'arrêter ici en définissant la notion de simple connexité (espace connexe par arcs où tout lacet est homotope à un point) ce qui nous permettrait de différencier l'anneau et le disque ou encore le ballon et la bouée. Mais dans ce cas là on verrait seulement si notre espace à un "trou" (des guillemets car on ne voit pas tous les types de trous) et on serait incapable de différencier un anneau de deux anneaux collés par exemple. L'un a un trou et l'autre deux.
La moralité est qu'il ne faut pas s'arrêter en si bon chemin et utiliser toute la puissance de l'outil que ne venons de découvrir.

Pour définir nos lacets, on a eu besoin d'un point de base x_0. Deux lacets n'ayant pas le même point de base ne sont clairement pas homotopes. Mais pour l'instant nous n'avons que des lacets vu à déformation près et rien de plus, c'est juste un ensemble. On sent qu'il y a une structure plus rigide sous-jacente, essayons de mettre une structure de groupe.

Dans la suite on se fixe un espace E connexe par arcs et x_0 un point de base pour les lacets. Soit γ un lacet, on note $[\gamma]$ sa classe d'homotopie, c'est-à-dire l'ensemble des lacets qui sont homotopes à γ. On note Γ l'ensemble des classes d'homotopies.

1. Quelle opération peut-on faire avec deux lacets pour en obtenir un troisième ?

2. Cela ne pose-t-il pas de problème pour définir une opération dans Γ ?
3. Pourquoi cette opération devient associative dans Γ ?
4. Qui peut jouer le rôle du neutre dans Γ ?
5. Que peut vouloir dire l'inverse d'un lacet γ ?
6. Cela définit-il vraiment un inverse dans Γ ?

On vient ainsi de munir Γ d'une structure de groupe. On le notera dans la suite $\pi_1(E, x_0)$ et on l'appellera groupe des lacets ou groupe fondamental.

Essayons de comprendre l'impact du choix du point de base. On note $\pi_1(E, x_0)$ et $\pi_1(E, x_1)$ les groupes des lacets de E basés en x_0 et x_1.
Comme E est supposé connexe par arcs il existe un chemin c reliant x_0 et x_1.

1. Comment transformer un lacet basé en x_0 en un lacet basé en x_1 ?
2. Ce procédé se transforme-t-il en une application de $\pi_1(E, x_0)$ vers $\pi_1(E, x_1)$?
3. Cette application est-elle un morphisme ?
4. Injectif ? Surjectif ?

On a donc que $\pi_1(E, x_0)$ et $\pi_1(E, x_1)$ sont isomorphes. C'est pour cela que dans la suite on s'autorise à noter simplement $\pi_1(E)$.

Essayons de voir quelques groupes fondamentaux :

1. Qui est $\pi_1(\mathbb{R})$?
2. $\pi_1([0, 1])$?
3. $\pi_1(\mathbb{R}^2)$?
4. $\pi_1(D)$ (le disque unité dans $\mathbb{R}^2$) ?
5. $\pi_1(\mathbb{S}^1)$?
6. $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ (deux cercles tangents) ?
7. $\pi_1(\mathbb{R}^3)$?
8. $\pi_1(\mathbb{S}^2)$?
9. Le groupe fondammental du ruban de Möbius ?
10. $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ (la bouée) ?
11. Pouvez-vous trouver un espace ayant pour groupe fondammental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? (Peut-être un peu dur)

Maintenant il faut montrer que le groupe fondammental est invariant par homéomorphisme. On considère E et F deux espaces connexes par arcs et f une application continue de E vers F.

1. Trouver une application f_* de $\pi_1(E)$ vers $\pi_1(F)$.
2. Est-ce un morphisme ?
3. Que dire de f_* si f est un homéomorphisme ?

Deux espaces homéomorphes ont donc des groupes fondammentaux isomorphes. Comment dorénavant montrer qu'une bouée et un ballon ne sont pas homéomorphes ?