Lucas Toury - Lycée Saint Martin 13 décembre 2023

Du jeu de Hex au point fixe du pliage d'une feuille de papier

1 Introduction

Dans cette étude, nous allons nous pencher sur un lien qui existe entre la théorie des jeux et la topologie algébrique. Nous commencerons tout d'abord par étudier le Jeu de Hex dont on attribuera la création à John Nash en 1948. Grâce à son étude nous démontrerons un résultat tout à fait innatendu qui est le suivant : je prends deux feuilles de papier identiques, j'en froisse une et je la replace sur l'autre puis je l'aplatis dessus, alors un point de la feuille froissée est à la même place que sur l'autre feuille.
Ce résultat est en réalité une application d'un théorème fondamental de topologie algébrique appelé théorème du point fixe de Brouwer. Je vous propose donc donc de parcourir ensemble le chemin qui mène du jeu de Hex vers ce théorème clé. Nous commencerons donc avec de la théorie des jeux puis passerons à quelques notions de base de topologie dans les espaces métriques pour finalement arriver en topologie algébrique.

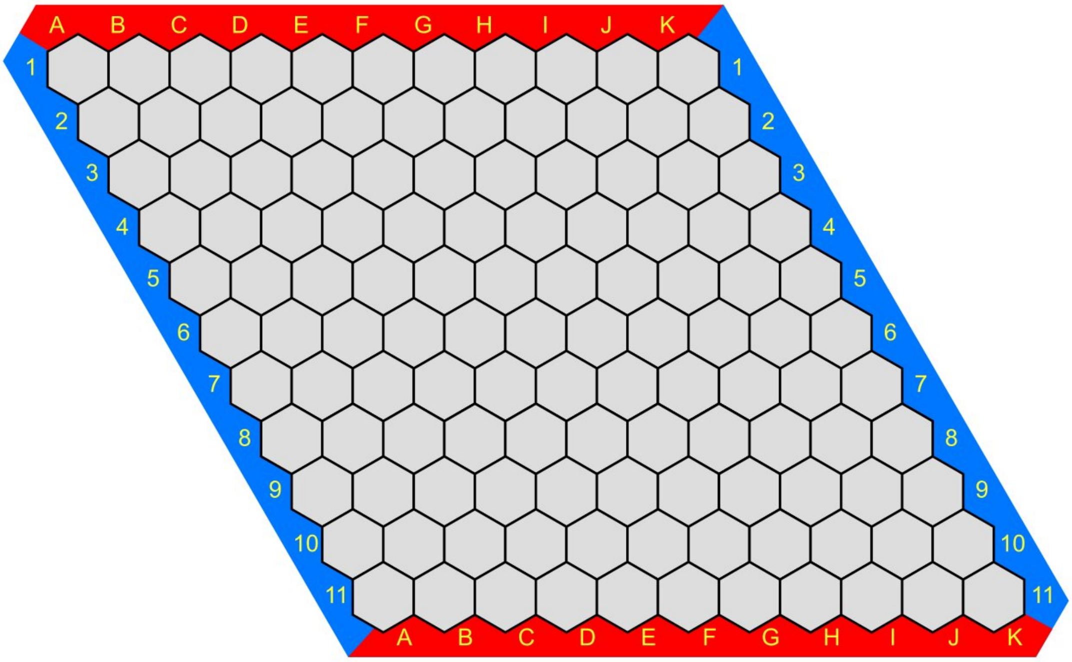
2 Le jeu de Hex

2.1 Description et règles

Wikipédia décrivant le jeu bien mieux que moi je vous laisse avec ses explications : "Le jeu de Hex est un jeu de société combinatoire abstrait pour deux joueurs. Il se joue sur un tablier en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Toutes les dimensions du côté du losange sont possibles, la plus traditionnelle est celle composée par 11 hexagones, mais on trouve aussi les valeurs 13 ou 19. L'un des inventeurs du jeu, John Nash, préconise un tablier de taille 14 $\times$ 14. Ce jeu possède des similarités avec le go.

Au début de partie, un tablier vide, illustré sur la figure de gauche, sépare deux joueurs. Ce tablier représente un losange formé par des hexagones réguliers. Chaque joueur est représenté par une couleur, bleu et rouge dans l'article, noir et blanc en général.

Les joueurs possèdent des pions à leur couleur qu'ils disposent tour à tour sur une case de leur choix et un par un. Le tablier se remplit ainsi progressivement. L'objectif d'un joueur, par exemple Bleu, est de relier les deux côtés opposés du losange symbolisés par la couleur bleue. Si la configuration des pions bleus permet la création d'une ligne continue (en blanc sur la figure) reliant un côté bleu à l'autre, Bleu a gagné et le jeu s'arrête."

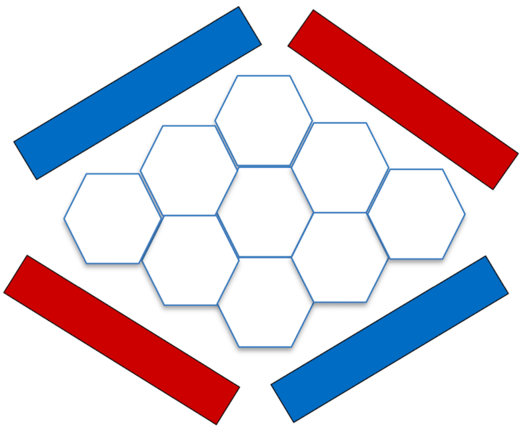


2.2 Stratégie gagnante

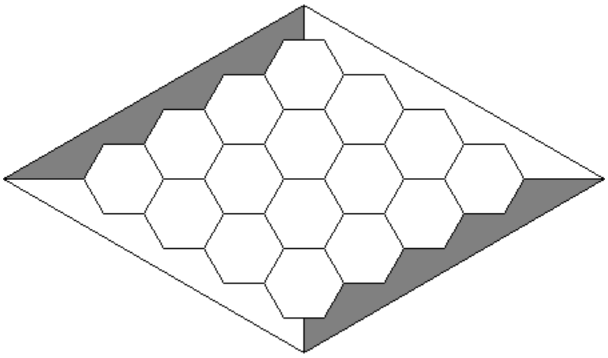
Avant de passer à la partie qui nous intéresse on peut se pencher un peu sur la stratégie du jeu. On a tenter de savoir si il existe une stratégie gagnante et si oui quel joueur l'a.
En réalité il y a un théorème général en théorie des jeux qui énonce que pour un certain type de jeu s'il n'y a pas de partie nulle alors l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante. Le résultat n'est pas très dur à montrer mais demande quelques notions en théorie des graphes que nous n'allons pas développer ici. Supposons donc que nous savons que l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante, il faut maintenant trouver qui c'est.

Comme toujours en maths, il est bon de faire des exemples simples.

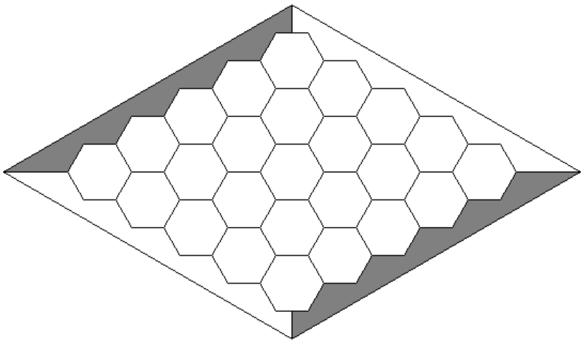
Exemple 2.1.
1) Sur un plateau 3×3 donner quel est le joueur qui a une stratégie gagnante.



2) De même pour un plateau 4×4.



3) Pareil pour un 5×5.



4) Démontrer votre conjecture en supposant que c'est l'autre joueur qui a une stratégie gagnante et en appliquant la méthode du vol de stratégie.

2.3 Il y'a toujours un vainqueur

On passe maintenant au résultat qui va nus intéresser pour la suite à savoir :

Théorème 2.1. *Au jeu de Hex quelque soit la taille du plateau, il n'y a pas de partie nulle.*

Démonstration. L'impossibilité d'une partie nulle est presque évidente : comment les rouges peuvent-ils barrer le chemin aux bleus autrement qu'en formant une chaîne continue de pions reliant les côtés rouges ? Une partie nulle ne pourrait arriver qu'avec un plateau dont toutes les cases sont occupées par des pions. Il s'agit donc de montrer que lorsque toutes les cases sont occupées, il y a forcément un chemin de pions rouges reliant les deux côtés rouges ou un chemin de pions bleus reliant les deux côtés bleus. Pour voir ceci, on considère l'ensemble R des cases de pions rouges reliés au côté rouge en haut par un chemin de pions rouges (les mathématiciens parleraient d'une « composante connexe » de l'ensemble des pions rouges). Si l'un des pions de R touche l'autre côté rouge, les rouges ont gagné. Sinon, l'ensemble R est bordé par un chemin de pions bleus reliant les deux côtés bleus, et les bleus ont gagné. Nous avons ainsi démontré qu'il n'y a pas de partie nulle à Hex. □

3 Topologie des espaces métriques

3.1 Suites et compacité

Définition 3.1. Soit X un ensemble et d une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$. On dit que d est une distance si :
- $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$
Dans ce cas ont dit que (X, d) est un espace métrique.

Exemple 3.1. Dire si les applications suivantes sont des distances :

1) $d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ 2) $d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$

3) $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array} \right.$ 4) $d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \end{array} \right.$

5) $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array} \right.$ 6) $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u,v) & \longmapsto & \sup_{n \geq 0} |u_n - v_n| \end{array} \right.$

7) $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u,v) & \longmapsto & \inf_{n \geq 0} |u_n - v_n| \end{array} \right.$ 8) $d : \left| \begin{array}{ccc} [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u,v) & \longmapsto & \sup_{n \geq 0} |u_n - v_n| \end{array} \right.$

Définition 3.2. Soit (X, d) un espace méttrique, (u_n) une suite de X et x un élément de X. On dit que (u_n) converge vers x si :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ d(x_n, x) \leq \epsilon$

Remarque 3.1. Se convaincre que cette définition coïncide avec la vision intuitive

Exemple 3.2. Que signifie converger avec les distances 3 et 4 de l'exemple précédent ?

Définition 3.3. Soit (u_n) une suite de X et ϕ une fonction strictement croissante de N dans N. Alors on dit que $(u_{\phi(n)})$ est une sous-suite de (u_n). ϕ est appelée fonction extractrice.

Exemple 3.3. On se place dans $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle. Dire si les suites suivantes convergent et si elles possèdent au moins une sous-suite convergente :
1) $u_n = (-1)^n$
2) $u_n = \frac{1}{n}$
3) $u_n = n$

4) Montrer que si une suite converge alors toute sous-suite converge vers la même limite.

5) Montrer que si pour une suite toute sous-suite converge alors la suite elle-même converge. (exercice évident si on pense à la bonne sous-suite)

6) (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Expliquer avec un dessin pourquoi une suite bornée de $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente.

Définition 3.4. Soit $K \subseteq X$, on dit que K est compact si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Exemple 3.4. Dire si les ensembles suivants sont compacts :
1) $\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle.
2) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ où n est fini et les x_i vivent dans un espace métrique quelconque.
3) $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (penser à Bolzano-Weierstrass)
4) $B_{0,1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ tq \ ||x|| < 1\}$ avec la distance usuelle sur $\mathbb{R}^2$
5) $\bar{B}_{0,1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ tq \ ||x|| \leq 1\}$

3.2 Continuité et uniforme continuité

Définition 3.5. Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et f une fonction de X dans Y. On dit que f est continue en x si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall y \in X, \ d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

Remarque 3.2. Bien se convaincre que cette définition colle avec notre intuition, attention ce n'est pas forcément évident.

Exemple 3.5. Écrire avec les quantificateurs que f n'est pas continue en x.

Définition 3.6. Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et f une fonction de X dans Y. On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in X, \ \forall y \in X, \ d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

Remarque 3.3. Voir la différence avec la continuité tout court et comprendre cette différence.

Exemple 3.6. Écrire avec les quantificateurs que f n'est pas uniformément continue.

Remarque 3.4. Le concept d'uniforme continuté est un résultat qui s'interprète mal de manière visuelle contrairement à la continuité, en revanche il est utile d'un point de vue théorique grâce au théorème suivant.

Théorème 3.7 (Théorème de Heine)**.** *Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Démonstration. Soit K un compact et f une fonction que l'on suppose continue mais pas uniformément continue.

1) Justifier qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de K telles que pour tout entier $n \geq 1$, $d(x_n - y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n) - f(y_n)) > \epsilon$.

2) Justifier qu'il existe deux sous-suites convergentes $(x_{\sigma(n)})$ et $(y_{\sigma(n)})$ d'éléments de K telles que pour tout entier $n \geq 1$, $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq \frac{1}{n}$ et $d(f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})) > \epsilon$.

3) Montrer que $\lim x_{\sigma(n)} = \lim y_{\sigma(n)}$ quand $n \to +\infty$.

4) Conclure. □

Définition 3.8. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$, une rétraction de X sur A est une application continue r de X dans A dont la restriction à A est l'application identité de A, c'est-à-dire telle que pour tout point a de A, $r(a) = a$.

Exemple 3.7. Dire les application suivantes sont des rétractions :

1) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \right.$ 2) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x}{|x|} \end{array} \right.$

3) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$ 4) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

5) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \right.$ 6) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

7) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \frac{-x}{|x|} \end{array} \right.$ 8) $r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$

3.3 Exercices

Exercice 1 : Soit (X,d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers une limite l. Montrer que l'ensemble $A = \{x_n, n \geq 0\} \cup \{l\}$ est compact.

Exercice 2 : Montrer que si f admet des limites en $\pm\infty$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Montrer que si f est uniformément continue alors elle vérifie que, pour toutes suites (x_n) , (y_n) on a :

$$\lim_{n\to+\infty}|x_n - y_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|f(x_n) - f(y_n)| = 0$$

En déduire que les fonctions

$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x^2) \end{array} \right.$

ne sont pas uniformément continues.

Exercice 4 : On dit que f qui va de (X,d) dans (Y,d') est M-lipschitzienne si il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x,y \in X,\ d'(f(x),f(y)) \leq M\ d(x,y)$$

Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 5 : Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout $x,y,z \in X$, montrer que
$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$.

Exercice 6 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On suppose que f et g sont uniformément continues. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.
On suppose que f est uniformément continue et bornée et que g est continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.

4 Vers le théorème du point fixe de Brouwer

4.1 Un peu d'histoire

Le mathématicien, c'est bien connu, transforme le café en théorème. Lorsqu'il tourne consciencieusement sa cuillère dans sa tasse de café, il sait qu'on a démontré un théorème de topologie assurant, qu'à la fin de l'opération un point (au moins) du café aura repris la place qu'il occupait au départ. Bien entendu, le café n'est pas en cause : le même résultat vaut pour un pot de colle ou de peinture. Le même théorème affirme que si vous froissez une feuille de papier et l'écrasez telle quelle sur une autre feuille mise à plat, l'un des points de la feuille froissée se superpose au même point de la feuille à plat. Ce point n'a pas bougé au terme du froissage. Dans les deux cas – le café et les feuilles de papier –, l'immobilité d'au moins un point est systématique. Que vous tourniez la cuillère à café durant des heures et que vous pliez la feuille en 1000 n'y changera rien, un point résistera toujours à votre acharnement. Le théorème qui garantit l'existence de ce point immobile est le théorème du point fixe. Son père officiel est le mathématicien hollandais Luitzen Brouwer (1881-1966), mais plusieurs noms devraient en réalité figurer sur son certificat de naissance. Il a été en effet énoncé et démontré plusieurs fois sous des formes variées, et à différents moments entre la fin du XIXe siècle et la moitié du XXe siècle. La raison de ces multiples renaissances est – hormis le fait que la culture d'un mathématicien ne peut embrasser l'intégralité des travaux de ses confrères – que son intérêt dépasse de loin le cadre purement géométrique. Grâce au théorème du point fixe, on démontre qu'il est pertinent de dénombrer les dimensions de l'espace, que les équations de la physique ont des solutions, que nous pouvons coopérer pour le bien de tous... Le théorème du point fixe a aujourd'hui près de 100 ans, mais il ne fait pas son âge : que vous étudiez les fractales, les cours de la bourse, ou vérifiez un compteur électrique, vous rencontrerez partout des points fixes sur votre chemin.

4.2 Théorème du point fixe

On note $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||x|| \leq 1\}$ où $||.||$ est une norme de $\mathbb{R}^n$. Vous ne savez pas ce qu'est encore une norme, mais disons pour le moment que c'est une distance encore mieux. Imaginez simplement que $||x||$ c'est la distance qui sépare x de l'origine de notre repère (exactement comme le module d'un nombre complexe).

Théorème 4.1 (Théorème de Brouwer)**.** *Toute application continue de $B^n \to B^n$ admet un point fixe. C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in B^n$ tel que $f(x_0) = x_0$.*

Grâce au jeu de Hex nous allons essayer de démontrer le théorème de Brouwer dans le cas $n = 2$. Mais avant ça démontrons-le dans le cas $n = 1$.
En le reformulant dans ce cas le théorème devient donc :

Montrer que toute fonction f continue et définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-1, 1]$ admet un point fixe, c'est à dire, qu'il existe $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

1) On pose $g(x) = x - f(x)$. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1]$.

2) Quel est le signe de $g(-1)$ et de $g(1)$?

3) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution dans $[-1, 1]$.

4) Conclure.

Passons maintenant à la démonstration dans le cas $n = 2$. On cherche donc à montrer qu'une fonction continue du disque du plan dans lui-même admet automatiquement un point fixe. Commençons avec ce premier résultat.

Théorème 4.2. *Le fait que au jeu de Hex quelque soit la taille du plateau, il n'y a pas de partie nulle implique qu'il n'existe pas de rétraction du losange (dans $\mathbb{R}^2$) sur son bord.*

Démonstration. On va montrer la contraposée du théorème. On désigne par K notre losange et on note ∂K son bord. On mesure la disance entre deux points à l'aide de la norme euclidienne $||.||$ et on note d la distance la plus petite entre deux points qui sont sur des côtés opposés du losange. On suppose qu'il existe $\rho : K \to \partial K$ une rétraction de K sur son bord.

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si m et m' sont deux points du losange K vérifiant $||m - m'|| \leq \delta$, alors $||\rho(m) - \rho(m')|| \leq \frac{d}{2}$.

On considère un plateau de Hex où on a choisi un entier n assez grand pour que le découpage de K en n^2 hexagones offre des cases de diamètre inférieur à notre précision δ. On suppose également que les bords possédés par les deux joueurs sont d'épaisseur inférieure à δ.

À chaque point m du losange, on associe l'un des quatres symboles $\leftarrow$ / $\rightarrow$ / $\downarrow$ / $\uparrow$ selon le principe suivant :

- si $\rho(m)$ est sur le bord gauche, on associe à m le symbole $\leftarrow$;
- si $\rho(m)$ est sur le bord droit, on associe à m le symbole $\rightarrow$;
- si $\rho(m)$ se trouve sur le bord haut mais pas sur l'un des deux bords précédents, on associe à m le symbole $\uparrow$;
- si $\rho(m)$ se trouve sur le bord bas mais pas sur l'un des deux bords précédents, on associe à m le symbole $\downarrow$.

2) Pourquoi est-ce que les points situés sur le bord portent le symbole associé à leur côté (pour les coins, on a donné la priorité à $\leftarrow$ / $\rightarrow$ plutôt que à $\downarrow$ / $\uparrow$) ?

On place maintenant des pions dans les hexagones en focntion du symbole associé au centre de la case : si le centre porte l'un des symboles $\leftarrow$ ou $\rightarrow$, la case est attribué au joueur 1 et sinon elle est attribuée au joueur 2.

3) En supposant que l'un des deux joueurs a gagné, trouver une contradiction. En déduire que l'on a une configuration où personne n'a gagné.

On a ainsi obtenu un placement de pions sur le plateau pour lequel aucun des deux joueurs n'a gagné. On n'a pas encore vraiment obtenu de partie nulle car, dans une vraie partie, il y a autant (à une case près) de cases attribuées à chacun des deux joueurs (ils ont joué à tour de rôle) et rien n'asure que notre coloriage est équilibré.

4) Donner un procédé qui permet de réduire l'écart entre le nombre de pions bleus et rouges en augmentant la taille du plateau de 1 (passer de $n \times n$ à $n + 1 \times n + 1$ en conservant la configuration où peronne n'a gagné.

5) En déduire que cette configuration donne lieu à une partie nulle sur un plateau plus grand. En déduire une contradiction et conclure. ☐

Il ne nous reste plus qu'à montrer le théorème de Brouwer :

6) Grâce au résultat précédent montrer qu'il n'existe pas de rétraction du cercle sur son bord (on pourra essayer de voir ce qui lie un cercle et un losange en terme de transformation continue et l'admettre).

7) Supposons qu'il existe f une fonction de D^2 dans D^2 sans point fixe. Avec un schéma et à l'aide de la fonction f, constuire une rétraction du disque sur son bord (c'est-à-dire associer à tous point x un point du bord, laisser les points du bord invariant par cette fonction et on pourra après s'être convaincu avec un dessin, admettre que cette fonction est continue).

8) En déduire le théorème de Brouwer

9) Appliquer ce théorème pour prouver le résultat de la feuille de papier.

Références

[RO12] Frédéric le Roux, *Le Jeu de Hex*, Images des Mathématiques, CNRS, 2012.

[DG22] Yves Dutrieux et Hervé Gianella *Jeux, casse-têtes et mathématiques*, Cassini Ed, 2022.

[BO15] Franck Boyer *Analyse Fonctionnelle, TD 1 : Espaces métriques. Espaces vectoriels normés*, Master Mathématiques et Applications 1 ère année, Aix-Marseille Université, 2015-2016.

[WIKI] Wikipédia *Théorème du point fixe de Brouwer* et *Le jeu de Hex*.

[MEM ?] Et sûrement un cours sur les espaces métriques dont je n'ai plus la référence auquel s'ajoute beaucoup de mémoire.