Lexique

1 Pour comprendre les énoncés

• $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On dit que P est un polynôme de degré n si il existe $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ avec $a_n \neq 0$ tels que $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n$.

• Soient E, F des ensembles, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ et f une application de E dans F. On écrit $f(A) \subseteq B$ si $\forall x \in A, f(x) \in B$.

• Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A est une partie ouverte si :

$$\forall x \in A, \exists \epsilon > 0,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq A$$

On dit que A est une partie fermée si pour toute suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $l \in A$.

• Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si : $\forall x \in A, x \leq m$. La borne supérieure est alors définie comme le plus petit des majorants.
Un majorant et une borne supérieure de A ne sont en général pas dans A.

• On se place dans $E = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit $||.||_\infty$ par :

$$||f||_\infty = sup_{x \in R}|f(x)|$$

On définit aussi

$$B(f, \epsilon) = \{g \in E, ||f - g||_\infty < \epsilon\}$$

Soit (f_n) une suite de E, on dit que (f_n) converge vers $f \in E$, si :

$$\forall \epsilon > 0, N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||f_n - f||_\infty \leq \epsilon$$

On dit d'une partie A de E qu'elle est ouverte si pour tout f dans A, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f, \epsilon) \subseteq A$.
On dit partie A de E qu'elle est fermée si pour toute suite (f_n) de A qui converge vers f alors f appartient à A.

2 Pour résoudre les énoncés

Dans la section suivante, les théorèmes et propriétés où il y a (*) au début signifie que pour les utiliser il faut les démontrer.

2.1 Analyse

Propriété : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Définition : On dit que (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

(*) Propriété : Une suite de Cauchy est bornée.

(*) Propriété : Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge.

(*) Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(*) Propriété : Si m est la borne supérieure de d'une partie A de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite de A qui converge vers m.

2.2 Algèbre

(*) Propriété : Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ alors pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$.

Définition : Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ des réelles distincts, on appelle polynôme interpolateur de Lagrange en les (x_i) les polynômes suivants :

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i} X - x_j}{\prod_{j \neq i} x_i - x_j}$$

(*) Propriété : Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui possède au moins $(n+1)$ racines est le polynôme nul.

2.3 Topologie de $\mathbb{R}$

Définition : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on dit que A est compact si A est fermée et bornée.

Propriété : De toute suite à valeur dans un compact, on peut extraire une sous-suite convergente.

(*) Propriété : L'image d'un compact par une application continue est compact.