

Problèmes

Exercice 1

Un village est composé de 5 immeubles. Dans les 5 immeubles habitent 5, 15, 25, 35 et 45 personnes. Chaque personne compte au moins deux membres de sa famille (excepté lui-même) parmi les habitants du village. Montrer qu'il existe une personne qui compte un membre de sa famille parmi les habitants de son immeuble.

Exercice 2

On considère un échiquier de taille 8×8 dont les cases sont alternativement coloriées en blanc et en noir. Une tour infernale est une pièce qui peut attaquer les cases de sa couleur situées sur sa ligne, ainsi que les cases de l'autre couleur situées sur sa colonne. Quel est le nombre maximum de tours infernales que l'on peut placer sur l'échiquier de telle sorte que deux tours infernales ne puissent jamais s'attaquer entre elles ?

Exercice 3

Au tableau, Maena a écrit 2021 nombres entiers sur une ligne. Puis, à chaque minute, en-dessous de la dernière ligne l qu'elle a écrite, elle écrit une nouvelle ligne l' de 2021 nombres en respectant la règle suivante : juste en-dessous de chaque entier de la ligne l , elle écrit le nombre de fois que cet entier est présent dans la ligne l . Montrer que Maena finira nécessairement par écrire la même ligne deux fois d'affilée.

Exercice 4

Anna a écrit un nombre N à 100 chiffres au tableau, dont le premier chiffre est non nul. Ces 100 chiffres forment 100×99 couples, et Anna calcule la somme des deux chiffres dans chacun de ces couples. Enfin, elle calcule le produit des 100×99 sommes ainsi obtenues. Est-il possible que ce produit soit égal au nombre N de départ ?

Exercice 5

Trouver les entiers n supérieurs ou égaux à 2 tels que, si on note a le plus petit diviseur premier de n , on peut trouver un diviseur positif de n noté d tel que $n = a^3 + d^3$.

Exercice 6

Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?

Exercice 7

n personnes laissent leur chapeau au vestiaire ; lorsqu'elles viennent les chercher, chacune d'entre elles prend un chapeau au hasard ; quelle est la probabilité qu'aucune d'entre-elles ne porte son chapeau à la sortie ?