Aparté sur la complétude

1 Introduction

On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$.

1. Montrer que $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante pour $n \geq 1$.
4. En déduire qu'elle converge dans $\mathbb{R}$ et trouver sa limite.
5. (u_n) converge-t-elle dans $\mathbb{Q}$?

2 La bonne définition

1. Donner la définition dans $\mathbb{R}$ qu'une suite (u_n) converge vers l.
2. Comme adpater cette définition pour essayer de se passer de la limite ?
3. Donner l'exemple d'une suite dont l'écart entre les termes tend vers zéro mais qui ne converge pas.

Définition 2.1. Soit (E, d) un espace métrique, on dit que $(u_n$ est une suite de Cauchy de E si :

Définition 2.2. (E, d) un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge (dans E)

1. Donner des exemples d'espaces non complets.

Définition 2.3. Rappel : On dit qu'un espace métrique (K, d) est compact si pour toute suite à valeurs dans K il existe une sous-suite qui converge dans K.

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
3. Montrer qu'une suite de Cauchy admettant une sous-suite qui converge vers l converge elle-même vers l.
4. Donner l'exemple d'une suite admettant une valeur d'adhérence mais qui ne converge pas.
5. Montrer qu'un espace compact est complet.
6. Montrer que $\mathbb{R}$ est complet (muni de la distance induite par la valeur absolue).
7. Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. On munit $E \times F$ de la distance $D((e_1, f_1), (e_2, f_2)) = \max\{d(e_1, e_2), d'(f_1, f_2)\}$. Montrer que $E \times F$ est complet si et seulement si E et F le sont.