Lucas Toury - ENS Rennes

Formules de Taylor. Exemples et applications

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce document est de rencontrer les différentes formules de Taylor et quelques unes de leurs multiples applications. Il est aussi important de voir les différences entre les formules en terme de résultat (caractère local ou global) mais aussi au niveau des conditions d'applications. On distinguera trois grandes catégories : les fonctions réelles à valeurs réelles, les fonctions réelles à valeurs vectorielles et les fonctions vectorielles à valeurs vectorielles.
L'idée des formules de Taylor (que l'on appelle aussi formule de MacLaurin si elles sont écrites en 0) est d'approcher une fonction par un polynôme donné par des informations uniquement localement en un point. Ceci différencie par exemple cette approche de l'interpolation de Lagrange qui nécessite la valeur de la fonction en plusieurs points.

2 Fonctions à valeurs réelles

2.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.1. *Formule de Taylor-Young : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle non trivial et $a \in I$. On suppose que f est $n-1$ dérivable dans un voisinnage de a et que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par*

$$f(a+h) =_{h\to 0} f(a) + hf'(a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Remarque 2.1. Comme le montre la formule, Taylor-Young donne une information locale au voisinnage de a mais nécessite des hypothèses assez faible à savoir seulement l'existence de $f^{(n)}(a)$.

Application 2.1. Toute la théorie des développements limités repose sur cette formule. C'est par cette dernière que l'on trouve les développements limités usuels.

La preuve de l'inégalité de Taylor-Young résulte de la définition de la dérivabilité. Il suffit pour cela que $f^{(n+1)}$ existe en a. Elle est valable pour des fonctions à valeurs dans un evn (pas d'hypothèses de complétude). La formule de Taylor-Young justifie que toute fonction C^n admet un développement limité à l'ordre n. La réciproque est fausse.

Contre-exemple 2.1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{x}})$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ vérifie $f(x) = o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sans être de classe C^n car elle n'est même pas C^1. En effet f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$ car

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}e^{\frac{-1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{h}}) \to 0 \text{ quand } h \to 0,$$

mais

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(e^{\frac{-1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{x}}) - \cos(e^{\frac{1}{x}})),\ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

ne converge pas vers $f'(0) = 0$ quand $x \to 0$.

2.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 2.2. *Théorème de Rolle : Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segemnt $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cette intervalle et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a)=f(b)$, il existe alors un point $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Contre-exemple 2.2. f doit être à valeurs réelles. En effet $f(t):=e^{it}$ est continue sur $[0,2\pi]$, de classe C^1 sur $]0,2\pi[$ et $f(0)=f(2\pi)$ mais $f'(t)=te^{it}\neq 0$ pour tout $t\in]0,2\pi[$.

Corollaire 2.3. Théorème de accroissement finis : Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe alors un réel $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Du théorème de Rolle et de son corollaire qu'est le théorème des accroissements finis on essaye de déduire une généralisation qui porte sur les dérivées d'ordre supérieure.

Théorème 2.4. *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur ce segment et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe alors un réel $c\in]a,b[$ tel que :*

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

On peut en déduire facilement le thèorème suivant

Théorème 2.5. *Inégalité de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur ce segment et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et qu'il existe $M>0$ telle que $f^{(n+1)}\leq M$ alors :*

$$|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k|\leq\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarque 2.2. Cette inégalité est certe moins précise que la formule de Taylor-Lagrange mais elle a la particularité de subsister pour les fonctions à valeurs vectorielles contrairement à l'égalité.

Remarque 2.3. Avec la formule de Taylor-Lagrange on voit directement que si f est une fonction dont la dérivée n-ème s'annule alors f est polynômiale car égale à sa somme de Taylor jusqu'à l'ordre n.

On se propose dans le résultat qui suit de généraliser et de montrer que si l'annulation de la dérivée n'est qu'une information ponctuelle, la propriété reste vraie. Ce théorème utilise très fortement les propriétés topologiques de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.6. *Sunyer-i-Balager : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale.*

Démonstration. Posons $F_n = \{x \in \mathbb{R} |\ f^{(n)}(x) = 0\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$. On veut montrer que f est polynomiale sur chaque composante connexe de l'ouvert Ω, puis que le complémentaire X de celui-ci est vide.
Soient $]a, b[$ une composante connexe de Ω, et $[c, d]$ un segment inclus dans $]a, b[$. En fixant $x_0 \in]c, d[$, comme il est dans un $\mathring{F}_{n_0}$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $f^{(n)} = 0$ sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Sur cet intervalle f est donc égale à un polynôme P, on va montrer que c'est le cas sur $[c, d]$. Pour cela on pose :

$$\Gamma = \{t \in]x_0, d] |\ \forall x \in [x_0, t],\ f(x) = P(x)\}$$

qui n'est pas vide, et l'on remarque que $M = \sup\Gamma$ ne peut pas valoir autre chose que d. En effet si $M < d$ alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que f coïncide avec un certain polynôme Q sur $]M - \eta, M + \eta[$, mais alors P et Q coïncident sur l'ensemble infini $]M - \eta, M[$ et cela contredit le fait que M est le supremum de Γ. Ainsi $f = P$ sur $[x_0, d]$, et le même raisonnement vers la gauche montre que $f = P$ sur $[c, d]$. Comme c'est valable pour tous les segments $[c, d]$, c'est valable sur toute la composante connexe $]a, b[$.
Reste à montrer que X est vide. On commence par montrer qu'il est parfait (fermé et sans points isolés). Si X admet un point isolé x_0, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[\cap X = \{x_0\}$. D'après ce qui précède, f coïncide avec un polynôme P sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$ et avec un polynôme Q sur $]x_0, x_0 + \epsilon[$. En dérivant successivement en x_0, on obtient $P = Q$ d'où $f = P$ sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. Ainsi cet intervalle est inclus dans un $\mathring{F}_{deg(P)+1} \subset \Omega$ ce qui est absurde.
Supposons finalement $X \neq \emptyset$. Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$ on a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \cap F_n)$. Comme X est fermé dans $\mathbb{R}$ complet, le théorème de Baire montre que l'intérieur d'un certain $X \cap F_{n_0}$ (pour la topologie de X) doit être non vide. Il existe $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$]a, b[\cap X \neq \emptyset \text{ et }]a, b[\cap X \subset F_{n_0}.$$

On choisit alors $x \in]a, b[$. Si $x \in X$ alors $f^{(n_0)}(x) = 0$. Mieux, x n'est pas isolé donc on peut trouver une suite injective (x_p) qui tend vers x, et par théorème de Rolle successifs et passage à la limite, on a $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Si $x \notin X$ alors $x \in \Omega$, et alors la composante connexe Ω_x de x dans Ω admet une extrémité x_0 dans $]a, b[$ (parce que $]a, b[$ intersecte X). D'après ce qui précède, f coïncide avec un polynôme P sur Ω_x. Mais $x_0 \in X\cap]a, b[$ donc $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \geq n_0$ d'où $\deg(P) < n_0$. En paticulier $f^{(n_0)}(x) = 0$.
Dans tous les cas on a $f^{(n_0)} = 0$ sur $]a, b[$, donc $]a, b[\subset \mathring{F}_{n_0}$ ce qui est absurde. Donc X est vide, donc $\Omega = \mathbb{R}$ qui est connexe et f y est polynomiale. □

2.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 2.7. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} alors*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Remarque 2.4. Les 3 formules de Taylor précédentes sont de la moins précise à la plus précise. Les hypothèses nécessaires sont aussi de plus en plus fortes. Elles sont de nature très différentes. La formule de Taylor-Young est une formule locale. La formule de Taylor-Lagrange donne des renseignements sur tout un intervalle. Quant à la formule de Taylor reste intégral, c'est la seule à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce reste.

Application 2.2. C'est grâce à la formule de Taylor avec reste intégral qu'on démontre le DSE de fonctions usuelles.

Application 2.3. La fonction de Bessel J_0, définie par

$$J_0(x) := \frac{2}{x}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(\theta)d\theta,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (théorème de dérivation sous l'intégrale) et $|J_0^{(k)}(x)| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\left| J_0(x+h) - \sum_{k=0}^{n} J_0^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} \right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que J_0 est développable en série entière en tout point $x \in \mathbb{R}$ et que

$$J_0(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!},\ \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Contre-exemple 2.3. Attention, la série de Taylor ne converge pas toujours vers la fonction.
Il arrive que la série de Taylor converge mais sa somme ne coïncide pas avec la fonction. Par exemple $\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)e^{\frac{-1}{x}}$ admet une série de Taylor identiquement nulle en zéro.
Il arrive que la série de Taylor ne converge pas.

2.3.1 Autre application : Le théorème de Bernstein

Lemme 2.8. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. Si f est paire et $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in]-a, a[$, elle est alors développable en série entière sur $]-a, a[$.

Démonstration. Pour tout entier naturel n et tout $x \in]-a, a[$, on note :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\ R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Il s'agit alors de montrer que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-a, a[$. Avec la parité de la fonction f on déduit que $f^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et avec la positivité des $f^{(2k)}$ que :

$$\forall x \in]-a, a[,\ P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} \geq 0,\ R_{2n}(x) \leq f(x).$$

D'autre part, avec la formule de Taylor avec reste intégral on peut écrire pour tout $x \in]0, a[$:

$$R_{2n}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(xu)du$$

et avec la croissance de $f^{(2n+1)}$ (du fait que $f^{(2n)} \geq 0$) on a pour tous $r \in]0, a[$,

$$0 = f^{(2n+1)}(0) \leq f^{(2n+1)}(xu) \leq f^{(2n+1)}(ru)$$

ce qui entraîne :

$$0 \leq R_{2n}(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ru)du = \frac{x^{2n+1}}{r^{2n+1}} R_{2n}(r) \leq \frac{x^{2n+1}}{r^{2n+1}} f(r).$$

Il en résulte que $\lim_{n\to\infty}(x) = 0$ pour tout $x \in]0, a[$ et par parité le résultat est également vrai sur $]-a, a[$. Enfin avec $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$, on en déduit que $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x)$ et $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-a, a[$. □

Théorème 2.9. *Bernstein : Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. Si $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in]-a, a[$, f est alors développable en série entière sur $]-a, a[$.*

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du lemme précédent en introduisant la fonction g définie sur $]-a, a[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$. Cette fonction est de classe C^∞, paire avec $g^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(x) + f^{(2k)}(-x) \geq 0$ sur $]-a, a[$.
En notant $R_{n,f}$ [resp. $R_{n,g}$] le reste intégral dans la formule de Taylor à l'ordre n pour f [resp. g], on a pour tous $x \in]-a, a[$, $u \in [0, 1]$:

$$0 \leq f^{(2n)}(xu) \leq g^{(2n)}(xu) = g^{(2n)}(|x|u)$$

et :

$$0 \leq |R_{2n-1,f}(x)| = \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(xu)du \leq R_{2n-1,g}(x).$$

En utilisant le lemme précédent, on déduit donc que $\lim_{n\to\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$ pour tout $x \in]-a, a[$, puis avec :

$$f(x) = P_{2n,f}(x) + R_{2n,f}(x) = P_{2n-1,f}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$

on déduit que :

$$R_{2n-1,f}(x) = -\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} + R_{2n-1,f}(x) = -\frac{1}{2} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$$

et avec $\lim_{n\to\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = 0$ (convergence de la série de Taylor de la fonction paire g), on a $\lim_{n\to\infty} R_{2n,f}(x) = 0$ pour tout $x \in]-a, a[$. D'où le résultat. □

Dans le cadre particulier où toutes les dérivées de f sont positives, on peut donner une démonstration plus simple du théorème de Bernstein.

Théorème 2.10. *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. Si $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in]-a, a[$, f est alors développable en série entière sur $]-a, a[$.*

2.4 Bonus

Théorème 2.11. *Théorème de Borel : Soit (a_k) une suite quelconque de réels. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k.*

Remarque 2.5. En d'autres termes il existe toujours une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ admettant à l'origine une série de Taylor donnée (dont la rayon de convergence peut être nul).

Application 2.4. Toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ (avec des dérivées à droite en a et à gauche en b) peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$

Application 2.5. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, paire. Alors il existe $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x^2).$$

Remarque 2.6. Le théorème de Borel se généralise aux fonctions de n variables : si (a_α) est une suite quelconque de réels, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial^\alpha u(0) = a_\alpha$ pour tout α (en notation multi-indice).

3 Fonctions à valeurs vectorielles

3.1 Inégalités des accroissements finis

Théorème 3.1. *Inégalités des acroissements finis : Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|\cdot\|)$ un evn, $f \in C^0([a, b], F)$ et $\Phi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ deux fonctions admettant des dérivées à droite en tout point $t \in]a, b[$, telles que*

$$\|f'_d(t)\| \leq \Phi'_d(t), \ \forall t \in]a, b[.$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \Phi(b) - \Phi(a).$$

L'IAF permet d'établir le résultat fondamental suivant pour l'intégrale de Riemann

Propriété 3.2. Si $\phi \in C^0 \cap C^1_{pm}([a, b], F)$ alors

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(t)dt.$$

3.2 Formules de Taylor

Théorème 3.3. *Formule de Taylor-Young : Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $f \in C^n(I, E)$ une application $(n + 1)$-fois dérivable en a. Alors*

$$\left\| f(a + h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \right\| = o_{h \to 0}(|h|^{n+1}).$$

Application 3.1. Étude affine locale d'une courbe plane : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^∞ sur un intervalle I, définissant un arc paramétré du plan. Soient t un point intérieur à I, p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que le vecteur $v = \gamma^{(p)}(t)/p!$ soit non nul, et q le plus petit entier strictement plus grand que p tel que le vecteur $w = \gamma^{(q)}(t)/q!$ ne soit pas colinéaire à v (on suppose l'existence de tels entiers).
Discussion de l'aspect local de l'arc au voisinnage de t selon la parité de p et q : Grâce à la formule de Taylor-Young à l'ordre q on montre

- Si p impair et q pair : point de type ordinnaire.
- Si p impair et q impair : point de type inflexion.
- Si p pair et q impair : point de rebroussement de première espèce.
- Si p pair et q pair : point de rebroussement de deuxième espèce.

Théorème 3.4. *Inégalité de Taylor-Lagrange : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f : [a,b] \to E$ une application de classe C^n et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle qu'il existe $M > 0$ tel que $\|f^{(n+1)}\| \leq M$ alors*

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Théorème 3.5. *Formule de Taylor avec reste intégral : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ définie et de classe C^{n+1} sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point, on a alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$$

Remarque 3.1. Notez que la complétude de $(E, \|\cdot\|)$ est nécessaire pour manipuler l'intégrale de Riemann.

Application 3.2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors la fonction h définie par $h(x) := \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f'(0)$ si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, on a (formule de Taylor reste intégral + CVAR)

$$h(x) = \int_0^1 f'(tx)dt, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

et le théorème de dérivation sous l'intégrale justifie que le membre de droite définit une fonction de classe C^∞ par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

4 Fonctions à variables vectorielles

4.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4.1. *Inégalité des accroissement finis : Soit* $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ *des evn,* Ω *un ouvert de* E, x, $y \in \Omega$ *tels que* $[x, y] \subset \Omega$, $f : \Omega \to F$ *différentiable.*

Si $\Phi \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ *est dérivable sur* $]0,1[$ *et satisfait*

$$\|df[x + t(y - x)].(y - x)\| \leq \Phi'(t), \ \forall t \in]0,1[.$$

alors

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \phi(1) - \Phi(0).$$

2. *Si* f *est différentiable sur* Ω *et* x, y *sont deux points de* Ω *tels que* $[x, y] \subset \Omega$ *alors*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup\{\|df(z)\|_{L_c(E,F)}; \ z \in [x, y]\}$$

où le sup peut éventuellement être infini.

3. *Si* E *est de dimension finie et* $f \in C^1(\Omega, F)$ *alors* f *est localement lipschitzienne sur* Ω *: pour tout* $x \in \Omega$, *il existe* $r > 0$ *tel que* f *soit lipschitzienne sur* $\bar{B}_E(x, r)$

$$\forall x \in \Omega, \ \exists M, \ r > 0 \text{ tels que } \|f(y_1) - f(y_2)\| \leq M\|y_1 - y_2\|, \ \forall y_1, \ y_2 \in B_E(x, r).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Formule de Taylor-Young : Soit* $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ *des evn,* Ω *un ouvert de* E, $a \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $f : \Omega \to F$. *Si* f *est* n*-fois différentiable en* a *alors*

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2}d^2 f(a).(h, h) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(a).(h, ..., h) + o_{\|h\| \to 0}(\|h\|^n).$$

Application 4.1. Pour une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a, b) +$$

$$\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a, b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b) + o(\|(h, k)\|^2).$$

4.2.1 Application à la recherche d'extremums

Définition 4.3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est 2-fois différentiable en a, alors la matrice Hessienne de f en a est la matrice $n \times n$ de la forme bilinéaire symétrique continue $d^2f(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On déduit de la formule

$$d^2f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).(h_i, h'_j)$$

que

$$Hess(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

et donc

$$d^2f(a).(h, h') = h^T Hess(f)(a)h', \ \forall h, h' \in \mathbb{R}^n.$$

Propriété 4.4. Application à la recherche d'extrémums : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est 2-fois différentiable en a un point critique de f tel que $S := Hess(f)(a)$ est inversible.
- Si S est symétrique définie positive alors a est un minimum local de f.
- Si $-S$ est symétrique définie positive alors a est un maximul local de f.
- Si S admet deux valeurs propres de signe différent alors a est un point col de f.

Remarque 4.1. Dans le cas où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on peut avoir accès aux informations de la Hessienne en a plus simplement. On commence par regarder le déterminant pour savoir si la Hessienne est inversible et si les valeurs propres sont de même signe ou non. Si elles sont de même signe, on regarde la trace pour savoir si la matrice est définie positive ou négative.

4.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 4.5. *Formule de Taylor-Lagrange : Soit E, F deux evn et $f : U \to F$ avec U ouvert de E. Soient a, b tels que $[a, b] \subset U$. On suppose f de classe C^n sur U et $n+1$ différentiable sur $]a, b[$. Alors*

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(a).(b-a)^k\| \leq \ \sup{}_{c \in]a,b[} \|d^{(n+1)} f(c)\| \frac{\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Corollaire 4.6. Avec les hypothèses du théorème précédent dans le cas où $F = \mathbb{R}$ on a

$$\exists c \in]a, b[, \ f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(a).(b-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(c).(b-a)^{n+1}.$$

4.4 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4.7. *Taylor avec reste intégral : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, Ω un ouvert de E, $(F, \|\cdot\|)$ un Banach. Si $f \in C^k(\Omega, F)$ et $[a, a+h[\subset \Omega$ alors*

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(a).(h, ..., h)$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}d^k f(a+th).(h, ..., h)dt.$$

Remarque 4.2. Dans cet énoncé, on manipule une intégrale de Riemann pour les fonctions continues $[0,1] \to F$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, ce peut être une intégrale de Lebesgue.

Application 4.2. Un lemme de division : Soient f, g_1,...,g_k des fonctions numériques de classe C^∞ sur un voisinnage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, les différentielles $Dg_1(0)$,...,$Dg_k(0)$ étant indépendantes. On suppose que f s'annule à l'ordre $m \geq 1$ sur la sous-variété des zéros communs aux g_i, c'est-à-dire

$$g_1(x) = ... = g_k(x) = 0 \text{ entraîne } \partial^\alpha f(x) = 0$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| < m$. Alors il existe des fonctions $a_\gamma(x)$, de classe C^∞ au voisinnage de l'origine, telles que

$$f(x) = \sum_{|\gamma|=m} a_\gamma(x) g_1(x)^{\gamma_1} ... g_k(x)^{\gamma_k}.$$

Application 4.3. Lemme de Morse à n variables : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, c'est-à-dire que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $D^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u = \phi(x)$ entre deux voisinnages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\phi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2.$$