

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES

Lecture Dirigée de Recherche de 1^{ère} année de Magistère
Année universitaire 2021-2022

**Introduction aux Chaînes de Markov et Marches aléatoires
sur \mathbb{Z}^d .**

Présenté par : Lucas TOURY & Clara GENES

Encadrant :
Rémi MOREAU

Table des matières

1	Généralités sur les chaînes de Markov	1
1.1	Définitions et premières propriétés	1
1.2	Exemples de chaînes de Markov	2
1.2.1	La chaîne à deux états	2
1.2.2	Le modèle de la ruine du joueur	3
1.2.3	Les urnes d'Ehrenfest	3
1.3	Relation de Chapman-Kolmogorov	4
2	Propriétés sur les chaînes de Markov	5
2.1	Classification des états	5
2.1.1	Relation de communication	5
2.1.2	États récurrents et transients	6
2.1.3	Ensemble Clos	8
2.2	Périodicité	9
3	Théorèmes ergodiques	11
3.1	Notations	11
3.2	Théorèmes ergodiques	11
4	Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d	15
4.1	Définition	15
4.1.1	Idée générale et exemples	15
4.1.2	Présentation formelle	15
4.2	Réurrence et transience	15
4.2.1	Théorème de Chung et Fuchs	17
4.2.2	Théorème de Pòlya	18
4.3	Application des marches aléatoires à l'exemple du Casino	20
4.3.1	Le modèle	20
4.3.2	Le choix du paramètre α	21
4.3.3	Majoration de la probabilité $r(y)$ de le cas $\alpha > \mu$	22

1 Généralités sur les chaînes de Markov

Lorsqu'on étudie une suite de variables aléatoires et que l'on met de côté l'hypothèse d'indépendance, les chaînes de Markov représentent le cas le plus simple et c'est donc ce qui motive ici leur étude.

Dans tout ce document, E désigne un ensemble dénombrable d'états, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires dans E .

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov* si pour tout $n \geq 1$ et toute suite $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j)$ d'éléments de E telle que

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0,$$

on a l'égalité :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1)$$

Cette relation est appelée relation de Markov. On peut voir cette propriété comme un processus sans mémoire : en sachant l'état présent, toute information sur le passé est inutile pour prévoir l'état futur.

Définition 1.2. On dit que la chaîne est *homogène* si elle ne dépend pas du temps, c'est-à-dire si pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Dans ce cas, on note $p_{ij} := \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$ la *probabilité de passage* de l'état i à l'état j .

Définition 1.3. Dans le cas homogène on définit donc la matrice de transition qui est finie ou dénombrable de la manière suivante :

$$P := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.4. Soit P une matrice de transition. Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout couple $(i, j) \in E^2$ on a $p_{ij} \geq 0$,
2. pour tout $i \in E$ on a $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Dans ce cas, on dit que P est une matrice *stochastique*.

Démonstration. 1. Pour tout couple $(i, j) \in E^2$ on a p_{ij} une probabilité donc positive.
 2. Soit la fonction f définie par :

$$\forall i \in E, f : A \mapsto \sum_{j \in A} p_{ij}.$$

Or on sait que f est une mesure de probabilité donc

$$f(E) = \sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

□

Propriété 1.5. Si P est une matrice de transition alors elle admet la valeur propre 1 dont $e = (1, \dots, 1)^T$ est un vecteur propre associé.

Démonstration. En effet, si on considère le vecteur colonne défini par $e = (1, \dots, 1)^T$, on a :

$$(P \cdot e)_i = \sum_{j \in E} p_{ij} \cdot e_j = e_i.$$

C'est à dire

$$(P \cdot e)_i = \sum_{j \in E} p_{ij}.$$

Et on conclut grâce à la Propriété 1.4. □

Remarque 1.1. Pour E fini, on peut associer à la matrice de transition un graphe orienté $G = (A, E)$ ayant pour sommets $s \in E$ les états de la chaîne et pour arêtes $a = (i, j) \in A$ des flèches allant du sommet i vers le sommet j étiquetées p_{ij} lorsque p_{ij} est strictement positif.

1.2 Exemples de chaînes de Markov

1.2.1 La chaîne à deux états

La chaîne de Markov a deux états est la chaîne dont la matrice de transition correspond à :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Le graphe associé est le suivant :

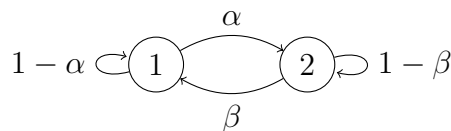


FIGURE 1 – Graphe de la chaîne de Markov à deux états.

1.2.2 Le modèle de la ruine du joueur

Pour ce modèle on dispose de deux joueurs A et B. La somme des fortunes de A et B vaut a et est constante. Ils jouent une série de "pile" ou "face" indépendants. À chaque tour si B perd, il donne un euro à A et vice versa. On prend la convention que A gagne avec une probabilité p et B gagne avec une probabilité $q := 1 - p$. On étudie quand est-ce qu'un joueur va être ruiné. Pour $n \geq 0$, on note X_n la fortune du joueur A au bout du n -ième lancers. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov où les états sont $\{0, 1, \dots, a\}$.

Remarque 1.2. Lorsqu'on se trouve en 0 ou a , on ne peut plus repartir, on dit que ces états sont absorbants.

Sa matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son graphe est donc :

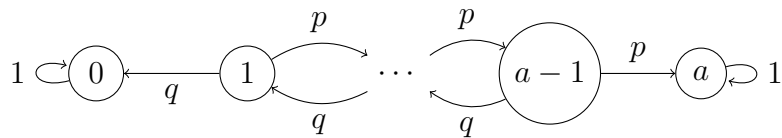


FIGURE 2 – Graphe associé à la ruine du joueur.

1.2.3 Les urnes d'Ehrenfest

On dispose de deux urnes A et B, ainsi que de a boules numérotées de 1 à a . À chaque étapes on choisit uniformément un nombre i entre 1 et a et on change la boule numéro i d'urne. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les variables aléatoires qui comptent le nombre de boules dans l'urne A au bout de n étapes. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, l'ensemble des états est $\{0, 1, \dots, a\}$. Sa matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{a-2}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son graphe est donc :

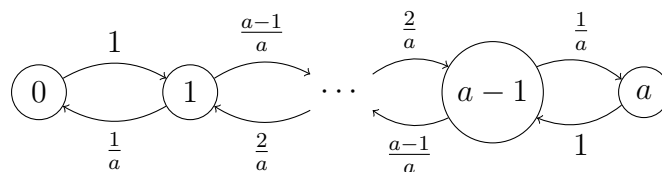


FIGURE 3 – Graphe associé aux urnes d'Ehrenfest.

1.3 Relation de Chapman-Kolmogorov

Dans la suite on conserve les notations du paragraphe précédent. Prenons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène caractérisée par un ensemble d'états E fini ou dénombrable et par $P = (p_{ij})_{(i,j) \in E^2}$ sa matrice de transition.

Définition 1.6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(i, j) \in E^2$ on note $p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$ la probabilité d'aller de l'état i à l'état j en n coups. On pose également $P^{(n)} := (p_{ij}^{(n)})$ avec $P^{(0)} = I$ pour convention.

Théorème 1.7 (Relation de Chapman-Kolmogorov). Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$P^{(n)} = (P)^n.$$

Démonstration.

On procède par récurrence sur n :

Initialisation : On a clairement $P^{(0)} = I = P^0$, donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n . On veut montrer que

$$p_{ij}^{(n+1)} = (P^{n+1})_{(i,j)}.$$

Or :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k, X_0 = i) \times \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i). \end{aligned}$$

On utilise la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k).$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k) \times \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} \times p_{kj}. \end{aligned}$$

Ce qui, traduit exactement $P^{(n+1)} = P^{(n)} \times P$ et termine la récurrence. □

Corollaire 1.8. Pour tout couple (m, n) d'entiers positifs on a :

$$P^{(n+m)} = P^{n+m} = P^n \times P^m = P^{(n)} \times P^{(m)}.$$

Autrement dit, pour aller de i à j en $m + n$ étapes cela revient à aller de i à un certain k en n étapes puis de k à j en m étapes.

Corollaire 1.9. La matrice $P^{(n)}$ est stochastique.

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = 1$$

grâce à la formule des probabilités totales. □

2 Propriétés sur les chaînes de Markov

2.1 Classification des états

L'objectif de cette sous-section est de découper l'ensemble E en classes. Il suffit donc que l'on construise une relation d'équivalence.

2.1.1 Relation de communication

Définition 2.1. On dit que l'état j est *accessible* depuis l'état i , s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)}$ soit strictement positif. On le note $i \rightsquigarrow j$.

Propriété 2.2. La relation \rightsquigarrow est réflexive et transitive.

Démonstration.

Réflexivité : On a toujours $p_{i,i}^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1$ donc par définition, $i \rightsquigarrow i$.

Transitivité : Soient $i, j, k \in E$ tels que $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow k$. Alors il existe $n, m > 0$ tels que $p_{i,j}^{(n)}$ et $p_{j,k}^{(m)}$ soient strictement positifs. Mais alors, d'après le Corollaire 1.8 on a :

$$p_{i,k}^{(n+m)} = \sum_{l \in E} p_{i,l}^{(n)} p_{l,k}^{(m)} \geq p_{i,j}^{(n)} p_{j,k}^{(m)} > 0.$$

Donc $i \rightsquigarrow k$ et d'où la transitivité. □

Remarque 2.1. Pour construire la relation d'équivalence voulue, il suffit que la relation \rightsquigarrow induise une autre relation symétrique.

Définition 2.3. On dit que deux états i et j *communiquent* si on a $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$. On le note $i \longleftrightarrow j$.

Propriété 2.4. La relation de communication est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence partitionnent E , l'ensemble des états.

Démonstration. Les propriétés de transitivité et de réflexivité sont encore vérifiées, car vérifiées par la relation d'accessibilité définie plus tôt. De plus, la symétrie est obtenue à partir de la définition de la relation de communication. □

Définition 2.5. On appelle classes indécomposables les classes d'équivalence de E pour la relation de communication. S'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence, donc si tous les états communiquent entre eux, on dit que la chaîne est *irréductible*.

2.1.2 États récurrents et transients

Définition 2.6. Pour tout état j on définit :

$$T_j := \inf \{n \geq 1 | X_n = j\}.$$

Cette variable désigne le temps que met la chaîne à atteindre l'état j .

Définition 2.7. Pour tout couple (i, j) d'états et tout $n \geq 1$, on définit :

$$f_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i).$$

Avec la convention $f_{ij}^{(0)} = 0$.

Ceci représente la probabilité que la chaîne passe par l'état j pour la première fois à l'étape n sachant que l'on part de l'état i initialement.

Théorème 2.8. Pour tout $n \geq 1$ on a l'identité :

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

Démonstration. La chaîne passe de i à j en n étapes si et seulement si elle part de i puis atteint j pour la première fois en $k \in \{0, \dots, n\}$ étapes et repasse par j en partant de j en $n - k$ étapes. Remarquons deux choses.

Soient $k_0, k_1 \in \{0, \dots, n\}$ avec $k_0 \neq k_1$ alors les chemins pris par la chaîne sont disjoints.

Soit $k_0 \in \{0, \dots, n\}$, la probabilité de passer de i à j pour la première fois en k_0 étapes puis de repasser de j à j en $n - k_0$ étapes vaut

$$\mathbb{P}(T_j = k_0 | X_0 = i) \times p_{jj}^{(n-k_0)}.$$

Autrement dit, elle vaut

$$f_{ij}^{(k_0)} p_{jj}^{(n-k_0)}.$$

Et ainsi, la probabilité de passer de i à j en n étapes est la somme des probabilités calculées ci-dessus pour chaque k_0 dans $\{0, \dots, n\}$. D'où le résultat. \square

Remarque 2.2. Puisque $p_{ij}^{(0)} = \delta_{i,j}$, le théorème reste vrai pour $n = 0$ et $i \neq j$.

Définition 2.9 (État récurrent et transient). On pose

$$f_{ij} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)}.$$

C'est la probabilité que la chaîne passe par j au moins une fois partant de i . Concrètement,

f_{jj} représente la probabilité pour que la chaîne repasse par j partant de j .
On dit que l'état j est récurrent si $f_{jj} = 1$. On dit qu'il est transient sinon.

Remarque 2.3. L'appellation "transience" est un anglicisme du mot "transitoire". Ce dernier représente bien la définition : l'état n'est que transitoire, la chaîne n'y repasse pas forcément.

Théorème 2.10. *Un état j est récurrent si :*

$$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} = +\infty.$$

Il est transient si la somme est finie.

Remarque 2.4. Ce théorème est assez intuitif, en effet si on note $N_j := \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}$ le nombre de retours à l'état j . Alors le nombre moyen de retours en j donné par $\mathbb{E}[N_j] = \sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)}$ est infini si et seulement si l'état j est récurrent.

Démonstration. On considère les fonctions génératrices :

$$P_{ij}(s) := \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} s^n, \quad F_{ij}(s) := \sum_{n \geq 0} f_{ij}^{(n)} s^n.$$

Grâce au Théorème 2.8 on a :

$$\begin{aligned} P_{jj}(s) &= 1 + \sum_{n \geq 1} p_{jj}^{(n)} s^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} s^n \sum_{0 \leq k \leq n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 0} s^n \sum_{0 \leq k \leq n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad (\text{car } f_{jj}^{(0)} = 0) \\ &= 1 + F_{jj}(s)P_{jj}(s). \end{aligned}$$

Lorsque $i \neq j$ on a de même $P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s)$. On a donc

$$P_{ij}(s) = \delta_{i,j} + F_{ij}(s)P_{jj}(s). \quad (2)$$

Supposons j récurrent, alors par définition on a

$$\sum_{n \geq 0} f_{jj}^{(n)} = 1.$$

D'après les résultats sur les séries entières, cela entraîne que

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} F_{jj}(s) = 1.$$

D'après (2)

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} P_{jj}(s) = +\infty$$

donc

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} s^n = +\infty$$

et finalement

$$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} = +\infty.$$

Réciproquement, si l'état j est transient alors

$$\sum_{n \geq 0} f_{jj}^{(n)} < 1.$$

En répétant le processus on a

$$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} < +\infty.$$

□

Propriété 2.11. Tout état de non-retour est transient, c'est-à-dire, pour tout état i , s'il existe j tel que $i \rightsquigarrow j$ mais tel que $j \not\rightsquigarrow i$ alors i est transient. À l'inverse, tout état absorbant est récurrent.

Démonstration. Un état de non-retour ne peut pas être visité plusieurs fois, comme son nom l'indique. Si un état est absorbant, une fois atteint, le processus reste dans cet état, il est donc visité une infinité de fois. □

Propriété 2.12. Si $i \leftrightarrow j$ et i est récurrent alors j est récurrent. Autrement dit, la récurrence est une propriété de classe.

Démonstration. Comme $i \leftrightarrow j$, il existe $q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p_{ij}^{(s)} > 0$ et $p_{ji}^{(q)} > 0$. On a alors :

$$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(q+n+s)} \geq \sum_{n \geq 0} p_{ji}^{(q)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(s)} = p_{ji}^{(q)} p_{ij}^{(s)} \sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

□

Remarque 2.5. En réalité il suffit que i soit récurrent et que j soit accessible depuis i pour que j soit récurrent. En effet si on passe par j , comme i est récurrent on le visitera ensuite et on aura finalement $j \leftrightarrow i$.

Propriété 2.13. Une chaîne de Markov ne peut pas aller d'un état récurrent vers un état transient.

Démonstration. D'après la remarque si i était récurrent et j accessible depuis i alors j est aussi récurrent, donc non transient. □

2.1.3 Ensemble Clos

Définition 2.14. On dit d'un ensemble C qu'il est clos (ou fermé) s'il est impossible d'en sortir, c'est-à-dire si pour tout $i \in C$ et tout $j \notin C$, on a : $p_{ij} = 0$.

Propriété 2.15. Soit C un ensemble clos, si $j \notin C$ alors j n'est accessible depuis aucun état de C .

Démonstration. En effet, si j était accessible depuis un état de C alors on pourrait sortir de C ce qui est absurde. \square

Propriété 2.16. Tout ensemble clos est une réunion de classes indécomposables.

Démonstration. Soit i un élément de C ensemble clos. Soit j dans la classe de i . Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$, or on ne peut pas sortir de C donc $j \in C$. Finalement toute la classe de i est dans C , ceci pour tout i dans C . D'où le résultat. \square

Propriété 2.17. Si un ensemble fini est clos et irréductible, tous ses états sont récurrents.

Démonstration. Tout d'abord, on a vu que des états communicants sont de même nature. De plus dans un ensemble clos, il y a au moins un état récurrent. En effet, la chaîne va passer un temps infini dans cet ensemble de taille finie. Donc il existe au moins un sommet où la chaîne passe un temps infini. Donc tous les états sont récurrents. \square

Remarque 2.6. La propriété précédente devient fausse si l'ensemble n'est plus supposé fini.

Propriété 2.18. Toute classe récurrente est close.

Démonstration. Soit i dans une classe récurrente notée C .

Soit $j \notin C$, on a vu que si $i \rightsquigarrow j$ et i récurrent alors j l'est aussi. Ainsi, si $p_{ij} > 0$ alors $i \rightsquigarrow j$. Donc $j \in C$, ce qui est absurde. \square

2.2 Périodicité

Cette sous-partie sera consacrée à l'étude des conditions pour que le temps séparant deux retours en un même état soit ou non multiple d'un temps minimum.

Définition 2.19. Soit j un état. On appelle *période* de j le pgcd de tous les entiers n non nuls tels que $p_{jj}^{(n)} > 0$. La période d'un état j est notée $d(j)$.

Si $d \geq 2$, on dit que j est périodique de période d .

Si $d = 1$ on dit que j est apériodique.

Si j est un état de non-retour on pose alors $d(j) = +\infty$.

Propriété 2.20. Notons $Z_i = \{n \geq 1 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$ tel que $d(i) = \text{pgcd}(Z_i)$. Alors on a les propriétés suivantes :

- Si $p_{ii} > 0$ alors i est apériodique.
- Si i est apériodique, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $n \in Z_i$.

Démonstration.

- Il est clair que si on peut boucler sur l'état i , alors $Z_i = \mathbb{N}^*$ et donc $d_i = \text{pgcd}(Z_i) = 1$.

- Puisque i est apériodique, il existe des entiers n_1, \dots, n_k dans Z_i dont le plus grand diviseur commun vaut 1. Mais alors le théorème de Bézout assure qu'il existe des entiers relatifs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que :

$$\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_k n_k = 1.$$

En notant $\alpha^+ = \sup(\alpha, 0)$ et $\alpha^- = \sup(-\alpha, 0)$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^+ n_i = 1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i^- n_i.$$

Les deux sommes ci-dessus sont dans Z_i puisque c'est un ensemble stable par addition. Si on note :

$$N = \sum_{i=1}^k \alpha_i^- n_i,$$

on en déduit que les deux entiers positifs consécutifs N et $(N+1)$ sont dans Z_i . Montrons alors que tout entier $n \geq N^2 - 1$ est dans Z_i . On effectue la division euclidienne de n par N :

$$n = qN + r \text{ avec } r < N.$$

Puisque $n \geq N^2 - 1$, on a $q \geq r$ et on peut écrire $q = r + r'$, d'où :

$$n = r'N + r(N + 1).$$

Or N et $N + 1$ sont dans Z_i , donc $n \in Z_i$. □

Théorème 2.21. *La périodicité est une propriété de classe : si i est de période d et que $j \leftrightarrow i$, alors j est aussi de période d . Ainsi, si la chaîne est irréductible, tous les états ont même période.*

Démonstration. Supposons que i et j communiquent, i ayant pour période d et j pour période $d' < d$. Puisque i et j communiquent, il existe deux entiers k et m tels que :

$$p_{ij}^{(k)} > 0 \text{ et } p_{ji}^{(m)} > 0.$$

Puisque la probabilité de revenir en i en $(k + m)$ étapes vérifie l'inégalité :

$$p_{ii}^{(k+m)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} > 0,$$

on en déduit que $(k + m) \in Z_i$. Mais puisque i a pour période d , il s'ensuit que $d \mid (k + m)$. Par ailleurs, pour tout entier $l \in Z_j$ on a :

$$p_{ii}^{(k+m+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(l)} p_{ji}^{(m)} > 0,$$

de sorte que $d \mid (k + l + m)$. Mais puisqu'on vient de dire que $d \mid (k + m)$, on en déduit que $d \mid l$. Or ceci est vrai pour tout $l \in Z_j$, donc par définition, en particulier pour $l = \text{pgcd}(Z_j)$. On en déduit que $d \mid d'$. Ceci contredit le fait que $d' < d$. □

Remarque 2.7. On peut donc parler de classe récurrente et de classe transiente.

Exemple 2.1. Pour les marches aléatoires avec des pas de taille 1, chaque état est de période 2.

3 Théorèmes ergodiques

3.1 Notations

On rappelle les notations introduites précédemment :

$$T_j := \inf \{n \geq 1 | X_n = j\},$$

$$f_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i),$$

$$f_{ij} := \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)}.$$

Et prenons pour loi initiale :

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots) \text{ où } \forall i \in \mathbb{N}, \mu_i = \mathbb{P}(X_0 = i).$$

Notons en particulier la loi \mathbb{P}^i définie par :

$$\mathbb{P}^i(T_j = n) = \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i)$$

et

$$M_{i,j} := \mathbb{E}^i[T_j] \text{ l'espérance de la variable } T_j \text{ pour la loi } \mathbb{P}^i.$$

C'est le temps d'attente moyen pour atteindre j en partant de i . $M_{i,i}$ est le *temps de retour moyen en i* et son inverse $\frac{1}{M_{i,i}}$ est une *fréquence moyenne de retour en i* .

Pour $M_{i,i} = +\infty$ on pose $\frac{1}{M_{i,i}} = 0$.

3.2 Théorèmes ergodiques

Définition 3.1. Lorsque $M_{i,i} < +\infty$, on dit que l'état i est *positif*. Dans le cas contraire, l'état i est dit *nul*.

On ommetra la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.2. (Critère de positivité)

Soit i un état.

1. Si $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$ alors i est positif.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ alors i est nul.

Remarque 3.1. Notons que d'après le Théorème 2.10, si i est transient, alors $p_{ii}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc i est nul.

Théorème 3.3. La propriété de positivité (resp. nullité) est une relation de classe pour la relation de communication.

Démonstration. C'est une conséquence du critère de positivité. En effet, si j est un état nul et si $j \leftrightarrow i$ avec $i \neq j$, il existe des entiers n_1, n_2 tels que :

$$\forall n \geq 0, p_{ji}^{(n_2)} > 0, p_{ij}^{(n_1)} > 0 \text{ et } p_{jj}^{(n_2+n_1+n)} \geq p_{ji}^{(n_2)} p_{ij}^{(n_1)} p_{ii}^{(n)}.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

et l'état i est aussi nul. □

Remarque 3.2. Si $M_{i,i}$ est fini, on a forcément $f_{ii} = 1$ donc i est récurrent. Ainsi, il y a des classes récurrentes positives, des classes récurrentes nulles et toutes les classes transientes sont nulles. En revanche, lorsque E est fini, il n'y a pas de classe récurrente nulle.

Remarque 3.3. Une chaîne de Markov finie irréductible est récurrente positive.

Définition 3.4. Une loi de probabilité $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ sur E est dite *stationnaire* si $\pi = \pi P$ ou encore de manière équivalente si pour tout $j \in E$:

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{i,j}.$$

Si on suppose qu'il existe une loi de probabilité stationnaire π on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi = \pi P^n$, de sorte que si on prend π comme loi initiale pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , de matrice de transition P , alors pour tout $k \geq 0$, les vecteurs aléatoires (X_0, \dots, X_n) et (X_k, \dots, X_{n+k}) ont même loi.

Remarque 3.4. On peut noter que ni l'unicité ni l'existence de la loi stationnaire ne sont mentionnées. En effet, par exemple pour la ruine du joueur $(\alpha, 0, \dots, 0, 1 - \alpha)$ est une loi stationnaire pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Définition 3.5. On appelle *noyau de transition* de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'application $\mathbf{P} : E \times E \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout i et j dans E par :

$$\mathbf{P}(i, j) := \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij}.$$

Propriété 3.6. Soit P une matrice stochastique et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de noyau de transition \mathbf{P} et de loi initiale μ . Supposons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irréductible. Alors P admet au plus une probabilité stationnaire. Si π est une telle probabilité, alors $\pi_i > 0$, pour tout i dans E .

Démonstration. Soit π une loi stationnaire d'une chaîne de Markov irréductible. On va commencer par montrer que les π_i sont strictement positifs. Comme π est un vecteur de probabilité, il est clair qu'il existe un état i tel que $\pi_i > 0$. Soit j un autre état. Comme la chaîne est irréductible, il existe k tel que $p_{ij}^{(k)} > 0$. De plus comme π est stationnaire, on a : $\pi P^k = \pi$. D'où :

$$\pi_j = \sum_l \pi_l p_{lj}^{(k)} \geq \pi_i p_{ij}^{(k)} > 0.$$

On passe maintenant à l'unicité de π . Pour montrer qu'elle est unique il suffit de prouver que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 pour P (car dans ce cas,

il n'existe qu'un seul vecteur de probabilité dans le sous-espace). Or on sait qu'une matrice et sa transposée sont semblables, elles ont donc même valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité, mais on sait que le vecteur $e = [1, 1, \dots]^T$ vérifie $Pe = e$ d'après 1.5, il suffit donc de montrer que tout vecteur f vérifiant $Pf = f$ est constant.

Si u et v sont deux vecteurs colonnes, on convient de noter uv le vecteur défini par : $(uv)_i = u_i v_i$, pour tout $i \geq 1$. On note u^2 le vecteur uu .

On introduit Γ par $\Gamma(f) = f^2 - 2f(Pf) + P(f^2)$

On vérifie que :

$$\Gamma(f)_i = \sum_j \mathbf{P}(i, j)(f_i - f_j)^2 \geq 0 \quad (3)$$

De plus π est stationnaire, on a donc $\pi P(f^2) = \pi(f^2)$, il suit :

$$\pi \Gamma(f) = 2(\pi(f^2) - \pi f(Pf)) = 2\pi(f(f - Pf)).$$

Donc si f est un vecteur propre de P pour la valeur propre 1, on déduit de l'équation ci-dessus que :

$$\pi \Gamma(f) = 2\pi(f(f - Pf)) = 0,$$

mais on a aussi simplement :

$$\pi \Gamma(f) = \sum_i \pi_i \Gamma(f)_i,$$

avec $\Gamma(f)_i \geq 0$ pour tout i d'après ci-dessus, et $\pi > 0$ puisque la chaîne est irréductible. On déduit des deux dernières équations que pour tout i , $\Gamma(f)_i = 0$, et à nouveau grâce à (3), on conclut que si $\mathbf{P}(i, j) > 0$ (c'est-à-dire si i et j sont reliés dans le graphe), alors $f_i = f_j$. Mais puisque la chaîne est irréductible, le graphe est fortement connexe. On en déduit donc de proche en proche que $f_i = f_j$ pour tout i, j . \square

Théorème 3.7. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible. Alors

1. (**Théorème ergodique presque sûr**). Presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{X_k=i\}} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i]}.$$

2. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) tous les états sont récurrents positifs,
- (b) il existe au moins un état récurrent positif,
- (c) P admet une probabilité invariante π

Si l'une de ces conditions est réalisée, π est unique : $\forall i \in E, \pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i]}$.

Ce théorème ne sera pas démontré ici, mais une preuve peut être trouvée dans [6].

Définition 3.8. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux chaînes indépendantes ayant la même matrice de transition P et soit $Z_n = (X_n, Y_n)$ la chaîne produit. La matrice de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la matrice $P \otimes P$ définie par :

$$(P \otimes P)((i, \tilde{i}), (j, \tilde{j})) = P(i, \tilde{i})P(j, \tilde{j}).$$

Propriété 3.9. Si P est irréductible et apériodique, alors il en est de même de $P \otimes P$. Si de plus P est récurrente positive, alors $P \otimes P$ est récurrente positive.

Démonstration. P est apériodique donc pour tout i , il existe un entier $n(i)$ tel que pour tout $n \geq n(i)$ on ait $P^n(i, i) > 0$. P est irréductible donc pour tout couple (i, j) il existe un entier $m = m(i, j)$ tel que $P^m(i, j) > 0$. Ainsi, pour tout $n > m(i, j) + n(i)$, on a

$$P^n(i, j) \geq P^m(i, j)P^{n-m}(j, j) > 0.$$

D'où

$$(P \otimes P)^n((i, \tilde{i}), (j, \tilde{j})) \geq P^n(i, j)P^n(\tilde{i}, \tilde{j}) > 0$$

pour n assez grand. Ceci prouve donc que $P \otimes P$ est irréductible et apériodique. Si de plus P est récurrente positive d'après le Théorème 3.7 il existe une unique probabilité stationnaire π . On vérifie aisément que $\pi \otimes \pi$ est une probabilité stationnaire de $P \otimes P$, or $P \otimes P$ est irréductible c'est donc la seule. Finalement en réutilisant le Théorème 3.7, on en déduit que $P \otimes P$ est récurrente positive. \square

Théorème 3.10. (Théorème ergodique).

Si P est irréductible apériodique et récurrente positive, alors pour tout $i \in E$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi(i)$$

où π désigne l'unique probabilité stationnaire de P .

Démonstration. Notons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux chaînes indépendantes ayant la même matrice de transition P et T le premier instant où $X_n = Y_n$. Pour tout $i \in E$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i) &= \mathbb{P}(X_n = i | T > n) + \mathbb{P}(X_n = i | T \leq n) \\ &= \mathbb{P}(X_n = i | T > n) + \mathbb{P}(Y_n = i | T \leq n) \\ &\leq \mathbb{P}(T > n) + \mathbb{P}(Y_n = i). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = i) - \mathbb{P}(Y_n = i) \leq \mathbb{P}(T > n).$$

Et par symétrie :

$$|\mathbb{P}(X_n = i) - \mathbb{P}(Y_n = i)| \leq \mathbb{P}(T > n).$$

Supposons maintenant Y_0 de loi π (qui existe d'après le théorème 3.7). Par invariance, Y_n est de loi π et donc

$$|\mathbb{P}(X_n = i) - \pi(i)| \leq \mathbb{P}(T > n).$$

D'après la Proposition 3.9, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive. Ainsi, T est fini presque sûrement et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0.$$

\square

4 Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d

4.1 Définition

4.1.1 Idée générale et exemples

La marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est l'exemple le plus classique de chaîne de Markov. Il s'agit du cas où on prend μ la mesure uniforme sur $\{x \in \mathbb{Z}^d; \|x\|_1 = 1\}$. Pour des exemples concrets :

- ◇ Dans le cas $d = 1$, on peut se représenter un individu (ou « particule ») sur un escalier, qui tire à pile ou face pour décider si le prochain pas sera vers le haut ou vers le bas. À chaque étape, il n'y a que deux possibilités : un pas en avant ou un pas en arrière. Le seul paramètre libre du problème est la probabilité que la particule aille dans une certaine direction. Dans le cas de la mesure uniforme, on a équiprobabilité entre les deux options.
- ◇ Dans le cas $d = 2$, on peut se représenter exactement la même particule mais cette fois sur un échiquier infini où elle peut aller à droite, à gauche, en haut et en bas. On a toujours équiprobabilité entre les quatre options.

De même, on peut encore se représenter une marche aléatoire pour $d = 3$ où la particule se déplacerait dans l'espace (six directions possibles : en haut, en bas, à gauche, à droite, en avant, en arrière).

4.1.2 Présentation formelle

Définition 4.1. Soit $d \geq 1$ et soit (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{Z}^d . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(\pm e_1, \dots, \pm e_d)$. On appelle *marche aléatoire* la suite de variables aléatoires indépendantes $(S_n)_{n \geq 0}$ où S_n est définie par

$$S_n = X_0 + \dots + X_n.$$

Une partie importante de l'étude des marches aléatoires est de savoir si notre particule va repasser de manière presque sûre à l'origine et en particulier une infinité de fois. En réalité, si tel est le cas, elle passe de manière presque sûre en tout point.

4.2 Récurrence et transience

Théorème 4.2. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}$ le nombre de passages de la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en zéro. On a :

$$\mathbb{P}(S = +\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) < +\infty, \\ 1 & \text{si } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) = +\infty. \end{cases}$$

Dans le premier cas la marche est transiente et dans le second elle est récurrente.

Démonstration. Avec le Théorème de Fubini-Tonelli, on obtient $\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$. Donc si la série converge, S est intégrable donc finie presque sûrement, ce qui donne le premier cas. On pose $B = \{S < +\infty\}$. B se découpe suivant l'instant de dernier retour en 0 noté T .

L'intersection $\{T = n\} = \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n; S_k \neq 0\}$ donne :

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n; S_k \neq 0\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n; S_k - S_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n; S_k - S_n \neq 0\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \mathbb{P}(\forall k > n; S_k - S_n \neq 0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \mathbb{P}(\forall k > 0; S_k - S_0 \neq 0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \mathbb{P}(T = 0). \end{aligned}$$

Si la série diverge et si $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ alors $\mathbb{P}(B) = 0$, sinon on a $\mathbb{P}(T = 0) > 0$ donc $\mathbb{P}(B) = +\infty$ ce qui est absurde pour une probabilité. Alors $\mathbb{P}(S = +\infty) = 1$ puisque $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ est le seul cas possible. \square

Lemme 4.3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z}^d et ϕ_X sa fonction caractéristique. On a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \phi_X(t) e^{-i\langle n, t \rangle} d\lambda^{\otimes d}(t).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}^d$.

On note m la loi uniforme sur $[-\pi; \pi]^d$. La fonction $(\theta, x) \rightarrow e^{i\langle \theta, x - n \rangle}$ est bornée, donc intégrable par rapport à la mesure $m \otimes \mathbb{P}_X$. Par le théorème de Fubini, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x - n \rangle} d(m \otimes \mathbb{P}_X)(\theta, x) &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x - n \rangle} d\mathbb{P}_X(x) \right) dm(\theta) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} \left[e^{i\langle \theta, x - n \rangle} \right] dm(\theta) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\int_{[-\pi, \pi]^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x - n \rangle} d(m \otimes \mathbb{P}_X)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle \theta, x - n \rangle} dm(\theta) \right) d\mathbb{P}_X(x).$$

Mais de plus, pour tout couple $(k, n) \in (\mathbb{Z}^d)^2$, où $k = (k_1, \dots, k_d)$ et $n = (n_1, \dots, n_d)$, on a :

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle \theta, k - n \rangle} dm(\theta) = \prod_{p=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(k_p - n_p)} d\theta = \prod_{p=1}^d \delta_{n_p, k_p} = \mathbb{1}_{\{n\}}(k).$$

Comme \mathbb{P}_X -presque tout réel est entier, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x-n \rangle} d(m \otimes \mathbb{P}_X)(\theta, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{n\}}(x) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n). \end{aligned}$$

□

4.2.1 Théorème de Chung et Fuchs

Théorème 4.4 (Chung et Fuchs). *La marche aléatoire est transiente si et seulement si la fonction caractéristique ϕ de X_1 vérifie :*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\phi(t)} \right) d\lambda^{\otimes d}(t) < +\infty.$$

Démonstration. On pose pour $r < 1$,

$$S_r = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n \text{ et } S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}.$$

On a vu que

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0).$$

Comme $S = \lim_{r \rightarrow 1^-} S_r$, le théorème de convergence monotone assure que

$$E[S] = \lim_{r \rightarrow 1^-} \mathbb{E}[S_r].$$

Soit N un entier naturel. Comme $S_r = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n$, le théorème de convergence monotone donne :

$$\mathbb{E}[S_r] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^N \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n \right] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N r^n \mathbb{P}(S_n = 0).$$

Mais on a d'après le lemme et parce que les X_n sont *i.i.d.* :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \phi_{S_n}(t) d\lambda^{\otimes d}(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \phi(t)^n d\lambda^{\otimes d}(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N r^n \mathbb{P}(S_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^N (r\phi(t))^n d\lambda^{\otimes d}(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1 - (r\phi(t))^{N+1}}{1 - r\phi(t)} d\lambda^{\otimes d}(t). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient alors :

$$\mathbb{E}[S_r] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - r\phi(t)} d\lambda^{\otimes d}(t).$$

Comme S_r est réel, $\mathbb{E}[S_r]$ est réel, et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_r] &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - r\phi(t)} d\lambda^{\otimes d}(t) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\phi(t)} \right) d\lambda^{\otimes d}(t). \end{aligned}$$

On conclut en faisant tendre r vers 1^- et en utilisant le Théorème 4.2. \square

Corollaire 4.5. Si

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \phi(t)} \right) d\lambda^{\otimes d}(t) = +\infty,$$

alors la marche est récurrente.

Démonstration. En effet, grâce au lemme de Fatou, on a

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \phi(t)} \right) d\lambda^{\otimes d}(t) \leq \varliminf_{r \rightarrow 1^-} \int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\phi(t)} \right) d\lambda^{\otimes d}(t).$$

On applique alors l'hypothèse du Corollaire et le critère de Chung et Fuchs. \square

Théorème 4.6. Soit ϕ la fonction caractéristique de X_1 . Si $\frac{1}{1-\phi}$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$, alors la marche aléatoire est transiente.

Démonstration. Grâce à (4), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^N \phi(t)^n d\lambda^{\otimes d}(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1 - \phi(t)^{N+1}}{1 - \phi(t)} d\lambda^{\otimes d}(t). \end{aligned}$$

Comme $\left| \frac{1 - \phi(t)^{N+1}}{1 - \phi(t)} \right| \leq \frac{2}{|1 - \phi(t)|}$, on a l'inégalité

$$\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n = 0) \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{2}{|1 - \phi(t)|} d\lambda^{\otimes d}(t).$$

On a donc que la série de terme général $\mathbb{P}(S_n = 0)$ converge et on applique le Théorème 4.2. \square

4.2.2 Théorème de Pòlya

On va maintenant démontrer le résultat fondamental sur la récurrence ou la transience des marches aléatoires uniformes sur \mathbb{Z}^d . Un outil de la preuve sera le théorème d'analyse suivant.

Théorème 4.7 (Intégration des fonctions radiales).

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . On note V le volume de la boule unité pour cette norme. Alors, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, l'application $x \mapsto \phi(\|x\|)$ est intégrable par rapport à $\lambda^{\otimes n}$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}_+} nt^{n-1}|\phi(t)|d\lambda(t) < +\infty.$$

Et alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)d\lambda^{\otimes n}(x) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)nt^{n-1}d\lambda(t).$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert, $\phi \circ \|\cdot\|$ est intégrable si et seulement si ϕ est intégrable par rapport à m la mesure image de $\lambda^{\otimes n}$ par $\|\cdot\|$, et on aura alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)d\lambda^{\otimes n}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)dm(t).$$

Il suffit donc de caractériser m .

Soit $a \geq 0$. En utilisant successivement la définition d'une mesure image, l'homogénéité d'une norme, et la propriété d'échelle de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , on a :

$$m([0, a]) = \lambda^{\otimes n}(B(0, a)) = \lambda^{\otimes n}(aB(0, 1)) = a^n \lambda^{\otimes n}(B(0, 1)) = Va^n.$$

Comme les intervalles $[0, a]$ forment un π -système qui engendre la tribu borélienne de \mathbb{R}_+ , avec $\mathbb{R}_+ = \cup_{i=0}^{+\infty} [0, i]$ et comme on connaît la forme de m sur les intervalles $([0, a])_{a \in \mathbb{R}_+}$, on peut l'identifier. Or on voit que :

$$Va^n = \int_{[0, a]} Vnt^{n-1}d\lambda(t).$$

Donc m est la mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue $t \rightarrow Vnt^{n-1}\mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t)$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)dm(t) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)nt^{n-1}d\lambda(t),$$

ce qui est le résultat souhaité. □

Théorème 4.8 (Pólya, 1921).

La marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est récurrente pour $d = 1, 2$, et transiente si $d \geq 3$.

Démonstration. On note encore ϕ la fonction caractéristique de X_1 . On a, pour tout $\theta \in \mathbb{Z}^d$, $\phi(\theta) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos \theta_k$ et un développement limité montre que :

$$1 - \phi(\theta_1, \dots, \theta_d) = \frac{1}{2d} \|\theta\|_2^2 + o(\|\theta\|_2^2).$$

On obtient ainsi que

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{1}{1 - \phi(\theta)} d\lambda^{\otimes d}(\theta) \text{ a la même nature que } \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} d\theta_1 \dots d\theta_d$$

ou que

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

Or la nature de l'intégrale $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} d\theta_1 \dots d\theta_d$ est directement déterminée par le théorème d'intégration des fonctions radiales ci-dessus. En effet on applique le théorème avec l'application $\phi(t) = \frac{1}{t^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$. Alors :

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|\theta\|_2^2} d\theta_1 \dots d\theta_d = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|\theta\|_2) d\lambda^{\otimes d}(\theta).$$

Cette intégrale converge si et seulement si $\int_0^1 nt^{n-1} \frac{1}{t^2} d\lambda(t)$ converge, or :

$$\int_0^1 nt^{n-1} \frac{1}{t^2} d\lambda(t) = n \int_0^1 t^{n-3} d\lambda(t)$$

converge pour $n \geq 3$, diverge pour $n = 1, 2$. □

4.3 Application des marches aléatoires à l'exemple du Casino

Résumé : Le gérant d'un casino s'intéresse à l'évolution de son capital en fonction du temps. Il souhaite en particulier étudier la probabilité qu'il puisse un jour être ruiné. On va étudier la probabilité que ce gérant soit ruiné en analysant les cas où cette probabilité est minimale, ce dernier cas dépendant d'un paramètre caractérisant les rentrées d'argent du casino (c'est-à-dire les dépenses des clients).

4.3.1 Le modèle

Notations :

- $(Y_t)_{t \geq 0}$ représente le capital du casino en fonction du temps.
- Les rentrées d'argent sont déterministes et caractérisés par $\alpha > 0$ qui est tel que, entre les instants t_1 et t_2 , le casino gagne $\alpha(t_2 - t_1)$.

Les gains des joueurs ont lieu aux instants de saut d'un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ de paramètre 1. Plus précisément, considérons $(\xi_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d.*) de loi exponentielle de paramètre 1 et posons :

$$\begin{cases} T_0 &= 0 \\ T_i &= \xi_1 + \dots + \xi_i, \forall i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N_t = \max \{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}.$$

Ces gains sont donnés par une suite de variables aléatoires strictement positives $(X_i)_{i \geq 1}$ *i.i.d.*, et indépendantes du processus $(N_t)_{t \geq 0}$. Ainsi, à l'instant T_1 , un premier joueur gagne X_1 , etc. Remarquons que la variable N_t est égale au nombre de joueurs ayant eu un gain avant l'instant t .

On suppose que X_1 admet un moment d'ordre 2. On note

$$\mu = \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \sigma^2 = \text{Var}(X_1).$$

Si $Y_0 \geq 0$ est le capital initial du casino, pour tout instant $t \geq 0$,

$$Y_t = Y_0 + \alpha t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

(Lorsque $N_t = 0$ la somme de cette formule est par définition égale à 0.)

L'objectif principal du gérant est d'évaluer en fonction de son investissement initial y , la probabilité $r(y)$ qu'il ait un jour tout perdu, soit :

$$r(y) = \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } Y_t < 0 \mid Y_0 = y).$$

Bien évidemment, de son point de vue, l'idéal est que cette probabilité soit la plus petite possible.

Malheureusement pour lui, on a la propriété suivante.

Propriété 4.9. Pour tout $y \geq 0$, on a $r(y) > 0$, c'est-à-dire la probabilité qu'un jour le gérant perde tout est strictement positive.

Démonstration. Considérons deux réels $t > 0$ et $y \geq 0$. Comme les X_i sont strictement positives, on peut trouver un entier $k \geq 1$ tel que :

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k > y + \alpha t) > 0.$$

Comme par ailleurs $\mathbb{P}(N_t = k) > 0$, on a $\mathbb{P}(Y_t < 0 \mid Y_0 = y) > 0$, ce qui traduit exactement le résultat souhaité. \square

Etant donné que la probabilité $r(y)$ est strictement positive quel que soit l'investissement initial y , le but du gérant va être de minimiser cette probabilité en choisissant correctement le paramètre α . Ceci motive la sous-section suivante.

4.3.2 Le choix du paramètre α

Propriété 4.10. Si $\alpha < \mu$ alors pour tout $y \geq 0$ on a $r(y) = 1$.

Démonstration. Rappelons tout d'abord la loi forte des grands nombres (*LFGN*). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* et intégrables, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$N_t = (N_t - N_{\lfloor t \rfloor}) + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} (N_i - N_{i-1})$$

(où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière inférieure de t). Un résultat classique sur les processus de Poisson (on admettra ce résultat) dit que les variables $(N_i - N_{i-1})$ forment une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Poisson de paramètre 1. Ainsi, d'après la *LFGN*, on a :

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 1.$$

En utilisant à nouveau la *LFGN* et par un argument de composition de limites, on obtient alors :

$$\frac{Y_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \alpha - \mu.$$

D'où le résultat. \square

Remarque 4.1. Cette démonstration ne permet pas de conclure lorsque $\alpha = \mu$ bien que le résultat reste vrai dans ce cas. D'où la proposition suivante.

Propriété 4.11. Si $\alpha = \mu$ alors : $\forall y \geq 0, r(y) = 1$.

Pour montrer ce résultat, on va introduire la marche aléatoire définie pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \alpha \xi_i) \quad (5)$$

On rappelle également la loi du 0-1 de Kolmogorov qu'on ne démontrera pas ici :

Lemme 4.12. Loi du 0-1 de Kolmogorov.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit la tribu asymptotique de \mathcal{A} de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots).$$

Alors la tribu \mathcal{A} est triviale, *i.e.*, pour tout évènement E de \mathcal{A} , $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.

Démonstration. On a alors $Y_{T_n} = y - S_n$. Pour prouver le résultat, il suffit par exemple de vérifier que, lorsque $\alpha = \mu$, on a bien presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Pour cela, remarquons que, dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq 1 \right) &\geq \mathbb{P} \left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} \frac{S_k}{\sqrt{k}} > 1 \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right) > 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout N entier, l'évènement $\left\{ \limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right\}$ est indépendante des variables $X_1 - \alpha \xi_1, \dots, X_N - \alpha \xi_N$. Ainsi, il appartient à la tribu asymptotique de la suite $(X_i - \alpha \xi_i)_{i \geq 1}$ qui est triviale d'après la loi du 0 – 1 de Kolmogorov. D'où

$$\mathbb{P} \left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq 1 \right) = 1. \quad \square$$

Remarque 4.2. Le gérant du casino a donc tout intérêt à choisir un coefficient α strictement supérieur à μ .

4.3.3 Majoration de la probabilité $r(y)$ de le cas $\alpha > \mu$

Afin d'obtenir des renseignements sur la probabilité $r(y)$ lorsque $\alpha > \mu$, on va faire l'hypothèse suivante sur le modèle :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } e^{AX_1} \text{ soit intégrable} \quad (H_A)$$

et

$$\mathbb{E} \left[e^{A(X_1 - \alpha T_1)} \right] = 1. \quad (6)$$

On peut observer que ceci définit de façon non ambiguë un coefficient A relié au modèle, puisqu'on a le résultat d'unicité suivant.

Propriété 4.13. L'équation 6 admet au plus une solution strictement positive.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction $x \mapsto \mathbb{E} \left[e^{x(X_1 - \alpha T_1)} \right]$ est strictement convexe sur son domaine de définition. \square

Par exemple, si X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\gamma > 1/\alpha$, alors $A = \gamma - 1/\alpha$. De façon générale, l'intérêt de l'existence de ce coefficient A se voit dans le résultat suivant.

Propriété 4.14. Sous l'hypothèse (H_A) , la probabilité de ruine vérifie $r(y) \leq e^{-Ay}$ pour tout y positif.

Démonstration. On utilise la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 1}$ définie en 5. On peut noter qu'il suffit de se placer aux instants de saut pour pouvoir observer la ruine, d'où :

$$r(y) = \mathbb{P} \left(\max_{n \geq 1} S_n > y \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > y \right).$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc d'avoir $r(y) = \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > y \right) \leq e^{-Ay}$ pour un entier n et pour tout y positif.

Procédons par récurrence sur n .

Initialisation : On a bien $r_1(y) \leq e^{-Ay}, \forall y \geq 0$, d'après l'inégalité de Markov.

Hérédité : Supposons donc, pour un entier n , que $r_n(y) \leq e^{-Ay}, \forall y \geq 0$. Soit alors y positif fixé. On a :

$$r_{n+1} = \mathbb{P}(S_1 > y) + \mathbb{P} \left(S_1 \leq y \mid \max_{2 \leq k \leq n+1} (S_k - S_1) > y - S_1 \right).$$

D'une part, en notant \mathbb{P}_{S_1} la loi de S_1 , on a :

$$\mathbb{P}(S_1 > y) = \int_{]y, +\infty[} \mathbb{P}_{S_1}(du) \leq \int_{]y, +\infty[} e^{-A(y-u)} \mathbb{P}_{S_1}(du).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(S_1 \leq y \mid \max_{2 \leq k \leq n+1} (S_k - S_1) > y - S_1 \right) &= \int_{]y, +\infty[} r_n(y-u) \mathbb{P}_{S_1}(du) \\ &\leq \int_{]y, +\infty[} e^{-A(y-u)} \mathbb{P}_{S_1}(du). \end{aligned}$$

on obtient alors $r_{n+1} \leq e^{-Ay}, \forall y \geq 0$, ce qui achève la récurrence et la preuve de cette proposition. \square

Bibliographie

- [1] *Processus Stochastiques - Processus de Poisson, chaîne de Markov et martingales*, Dominique Foata, Aimé Fuchs, 2004
- [2] *Promenade aléatoire - Chaînes de Markov et simulation : martingales et stratégie*, Michel Benaïm, Nicole El Karoui, 2004
- [3] *Espérance conditionnelle et Chaînes de Markov*, Arnaud Guyader
- [4] *Texte de Agrégation externe de mathématiques, épreuve de modélisation, option A : Probabilités et Statistiques*, 2017
- [5] *De l'intégration aux probabilités*, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 2011
- [6] *Chaînes de Markov - Agrégation de mathématiques*, Daniel Flipo