

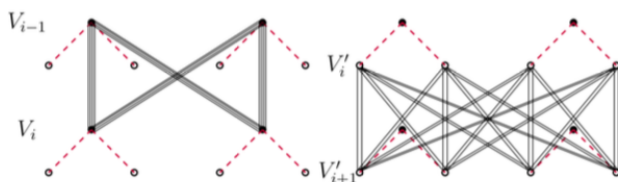
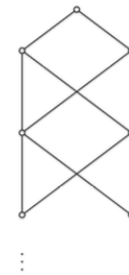
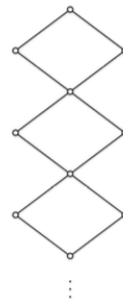
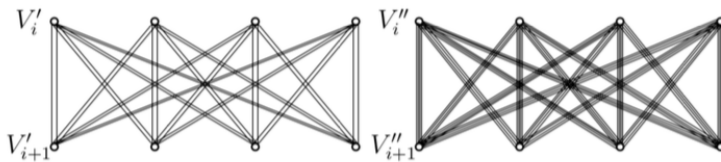
# Systemes dynamiques et groupes de dimension :

## Le cas particulier des Toeplitz



$$\mathbb{Z}^{|V_0|} \xrightarrow{A_0} \mathbb{Z}^{|V_1|} \xrightarrow{A_1} \mathbb{Z}^{|V_2|} \xrightarrow{A_2} \dots$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X' & \xrightarrow{T'} & X' \end{array}$$



UNIVERSIDAD  
DE CHILE

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Histoire</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques</b>	<b>2</b>
2.1	Généralités . . . . .	2
2.2	Espaces transitifs . . . . .	3
2.3	Espaces minimaux . . . . .	4
2.4	Les espaces de shift . . . . .	5
2.4.1	Introduction . . . . .	5
2.4.2	Le langage d'un espace de shift . . . . .	6
2.4.3	Shifts Toeplitz . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Groupes de dimension</b>	<b>7</b>
3.1	Groupes abéliens ordonnés . . . . .	7
3.2	Idéaux et groupes ordonnés simples . . . . .	8
3.3	Limite directe de groupes abéliens . . . . .	10
3.4	Limite directe de groupe abéliens ordonnés . . . . .	11
3.5	Groupes de dimension . . . . .	11
3.6	Cofrontières et groupes de dimension . . . . .	12
3.7	Équivalence orbitale . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Diagrammes de Bratteli</b>	<b>14</b>
4.1	Diagrammes de Bratteli . . . . .	14
4.2	Téléscopage et diagramme simple . . . . .	15
4.3	Groupe de dimension d'un diagramme de Bratteli . . . . .	16
4.4	Diagrammes de Bratteli ordonnés . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Liens entre systèmes dynamiques et diagrammes de Bratteli</b>	<b>19</b>
5.1	Dynamique des diagrammes de Bratteli ordonnés . . . . .	19
5.1.1	Le compact de Bratteli . . . . .	19
5.1.2	L'application de Vershik . . . . .	20
5.2	Représentation BV . . . . .	20
5.3	Morphismes et systèmes $S$ -adic . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Recherche</b>	<b>24</b>
6.1	Introduction . . . . .	24
6.2	Résultat . . . . .	26
6.3	Pour continuer . . . . .	28

# 1 Histoire

Traduit de l'introduction "Reccurrence in ergodic theory and combinatorial number theory" de Harry Furstenberg.

La dynamique théorique commence avec Newton qui, à lui seul, l'a mise en mouvement par son développement du calcul, sa formulation des lois du mouvement et sa découverte de la loi universelle de la gravitation. Dans la formulation de Newton, le mouvement d'un système dynamique est régi par un système d'équations différentielles satisfaites par les paramètres du système variant dans le temps, et pendant les deux siècles qui ont suivi la publication des *Principia* de Newton, le sujet a été traité comme un chapitre de la théorie des équations différentielles.

L'application de la théorie newtonienne au mouvement des planètes ou, plus généralement, le problème des  $n$ -corps, qui consiste à déterminer le mouvement de  $n$  masses ponctuelles soumises à une attraction gravitationnelle mutuelle, constituait le plus grand défi. L'approche la plus naturelle pour les analystes des 18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècles, d'Euler à Jacobi, était d'extraire autant d'informations que possible par une manipulation analytique des équations différentielles spécifiques. Avec un peu de chance, on pourrait même intégrer explicitement les équations différentielles, comme Newton l'avait fait dans le cas du problème des deux corps. Cet espoir ne s'est toutefois pas concrétisé, et toute la machinerie analytique utilisée pour résoudre le problème, y compris le puissant outil des séries infinies, n'a pas permis de répondre aux questions les plus fondamentales concernant le mouvement planétaire.

Dans la dernière décennie du 19<sup>ème</sup> siècle, Poincaré a publié ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* qui a apporté un changement de point de vue décisif. L'ingrédient principal de ce changement consistait à faire intervenir dans l'analyse la géométrie de l'espace des phases, c'est-à-dire l'espace des "valeurs possibles" du vecteur des paramètres dynamiques. Dans cette analyse globale, l'attention est déplacée des courbes de solutions individuelles vers l'ensemble de toutes les courbes possibles et leurs relations. Par exemple, en utilisant ce qui équivaut à une analyse topologique de l'espace des phases, Poincaré a pu établir dans certaines situations l'existence de solutions périodiques, résolvant ainsi une question d'une importance fondamentale. Une deuxième question était de savoir si l'on suppose que les courbes solutions ne sont pas périodiques, si elles se rapprochent finalement arbitrairement de positions déjà occupées (stabilité au sens de Poisson). En utilisant le prototype d'un argument de théorie ergodique, Poincaré a établi que pour tous les systèmes hamiltoniens limités, "la plupart" des courbes solutions sont stables au sens de Poisson.

Suite à l'approche qualitative de Poincaré, le point central de la théorie dynamique s'est déplacé des équations différentielles qui définissent un système dynamique vers l'espace des phases et le groupe de transformations implicites dans le système. C'est à Birkhoff que revient le mérite d'avoir rendu cette transition la plus explicite. Dans son traité de 1927 sur les systèmes dynamiques, il aborde de nombreux phénomènes dynamiques dans le contexte des groupes de transformations agissant sur des espaces métriques généraux. Parmi les résultats que Birkhoff obtient dans cette généralité, on trouve un analogue du résultat de Poincaré mentionné plus haut. Birkhoff montre que dans tout système dynamique sur un espace compact, il existe nécessairement une orbite (courbe solution) qui est stable au sens de Poisson.

Finalement, deux théories sont nées de ces développements : la théorie ergodique et la dynamique topologique. Toutes deux distillent, à partir de la théorie dynamique classique, la notion de groupe de transformations à un paramètre agissant sur un espace abstrait, l'espace étant doté respectivement d'une notion de volume (espace de mesure) ou d'une structure topologique.

Dans les deux cas, l'approche abstraite a été initialement adoptée non pas par souci de généralité, mais pour obtenir une plus grande clarté en se concentrant sur les aspects des systèmes dynamiques pertinents pour les phénomènes étudiés. Néanmoins, le champ d'application s'est considérablement élargi. La théorie utilise et a des applications dans plusieurs autres domaines, notamment la théorie des groupes, la combinatoire, la théorie des nombres...

## 2 Systèmes dynamiques

### 2.1 Généralités

**Définition 2.1.** Un système topologique dynamique est un couple  $(X, T)$  où  $X$  est un espace métrique compact et  $T : X \rightarrow X$  est une application continue.

*Remarque 2.1.* Dans plusieurs ouvrages, la définition est directement donnée avec  $T$  un homéomorphisme. Nous donnons ici une définition plus générale et nous dirons, dans le cas précédent, que le système est réversible.

Nous avons donc pour chaque point de  $x \in X$  l'ensemble  $(x, T(x), T^2(x), \dots)$  qui lui est associé. Une bonne manière de se représenter cela est d'imaginer que  $T$  agit sur les points et les déplace à des instants discrets. Nous avons donc une action naturelle de  $\mathbb{Z}$  sur  $X$ .

**Définition 2.2.** On notera  $T^{-n}(x) = \{y \in X | T^n(y) = x\}$ .

**Définition 2.3.**  $X$  est un espace de Cantor s'il est compact, métrique, totalement discontinu sans points isolés. On dit alors que  $(X, T)$  est un système dynamique de Cantor.

*Remarque 2.2.* Cette catégorie sera très intéressante pour la suite car elle contient les Toeplitz.

En particulier lorsque  $A$  est un ensemble fini, appelé alphabet, l'espace  $A^{\mathbb{Z}}$  des séquences bi-infinies muni de la topologie produit est un espace compact. Soit  $d$  la distance définie par  $d(x, y) = 2^{-r(x,y)}$  avec

$$r(x, y) = \min\{|n| \mid x_n \neq y_n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La topologie définie par cette distance est la même que la topologie produit et  $A^{\mathbb{Z}}$  est donc un espace compact métrique.

On définit alors la transformation continue shift  $S : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  par  $S((x_n)) = (x_{n+1})$ . Ainsi  $(A^{\mathbb{Z}}, S)$  est un système dynamique.

Lorsque l'alphabet contient plus de deux symboles  $A^{\mathbb{Z}}$  est un espace de Cantor.

## 2.2 Espaces transitifs

**Définition 2.4.** Un point  $x \in X$  dans un système dynamique  $(X, T)$  est dit transitif si pour tout ouvert  $U$  contenant  $x$ , il existe un  $n \geq 1$  tel que  $T^n(x) \in U$ .

Un espace non vide  $(X, T)$  est transitif si pour toute paire d'ouverts non vides  $U, V$ , il existe  $n \geq 0$  tel que  $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$ .

L'orbite positive d'un point est  $O_+(x) = \{T^n(x) \mid n \geq 0\}$ . Son orbite est  $O(x) = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(O_+(x)) = \{y \in X \mid T^n x = T^m y \text{ pour } m, n \geq 0\}$ .

*Remarque 2.3.* On voit directement que si un point a une orbite positive dense alors il est transitif.

**Propriété 2.5.** Un système dynamique  $(X, T)$  est transitif si et seulement s'il y a un point qui a une orbite positive dense.

**Définition 2.6.** Un morphisme de systèmes dynamiques de  $(X, T)$  vers  $(X', T')$  est une application continue  $\phi : X \rightarrow X'$  telle que  $\phi \circ T = T' \circ \phi$ . Si  $\phi$  est surjective, elle est appelée une application facteur et  $(X', T')$  est un système facteur de  $(X, T)$ .

*Remarque 2.4.* Un facteur d'un système dynamique hérite de certaines de ses propriétés. Pour le moment, on peut voir qu'un facteur d'un espace transitif est lui aussi transitif.

Si  $\phi$  est bijective, c'est alors un homéomorphisme de systèmes dynamiques et on dit que les systèmes sont conjugués.

Deux systèmes conjugués sont indiscernables l'un de l'autre au vu de leurs propriétés dynamiques. Il est difficile en pratique d'exhiber un homéomorphisme entre systèmes dynamiques. C'est pour cela que nous nous penchons sur l'étude d'invariants. Nous verrons par la suite un invariant complet mais pour un type de conjugaison plus faible que la précédente.

### 2.3 Espaces minimaux

Soit  $(X, T)$  un système dynamique, on dit que  $Y \subset X$  est stable si  $TY \subset Y$  et invariant si  $T^{-1}Y = Y$ .

**Définition 2.7.** Un système dynamique est minimal si  $X$  est l'unique ensemble fermé et stable.

**Propriété 2.8.** Un facteur d'un système minimal est minimal.

Un système dynamique  $(X, T)$  est minimal si et seulement si l'orbite positive de tous les points est dense dans  $X$ .

*Démonstration.* Nous ne prouverons que la deuxième partie. Supposons que  $(X, T)$  est minimal. Pour tout  $x \in X$ , l'adhérence de l'orbite positive de  $x$  est un ensemble stable, fermé et non vide et est, par conséquent, égal à  $X$ . Réciproquement, soit  $Y \subset X$  un ensemble fermé, stable et non vide. Pour tout  $y \in Y$  l'adhérence de son orbite positive est contenue dans  $Y$ . Comme elle est égale à  $X$ , on conclut que  $Y = X$ .  $\square$

*Remarque 2.5.* On voit aussi, d'après ce qui précède, qu'un système dynamique minimal est transitif.

*Exemple 2.1.* Le plus simple des systèmes dynamiques est un système périodique où  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  et où  $T$  est une permutation circulaire. Un point

périodique dans un système dynamique est un point  $x \in X$  tel que  $T^n x = x$  pour un certain  $n \geq 1$ . Un système est dit apériodique s'il ne contient pas de point périodique. Clairement un système périodique est apériodique si et seulement s'il est infini.

## 2.4 Les espaces de shift

### 2.4.1 Introduction

Soit  $A$  un alphabet non vide. On considère souvent que l'alphabet est fini. Un mot  $u$  sur  $A$  est un élément de l'ensemble noté  $A^*$ ,  $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$  avec  $u_i \in A$ . Dans ce cas, la longueur du mot  $u$  est  $n$ , notée  $|u|$ . Le mot vide est noté  $\epsilon$  avec pour convention  $|\epsilon| = 0$ . Les ensembles  $A^{\mathbb{N}}$  et  $A^{\mathbb{Z}}$  pris avec la topologie produit et la topologie discrète sur chaque copie de  $A$  sont des espaces métriques compacts. Les éléments de  $A^{\mathbb{Z}}$  et  $A^{\mathbb{N}}$  sont appelés des mots infinis sur  $A$ . Un facteur d'un mot fini  $w \in A^*$  est défini comme une concaténation finie de lettres consécutives apparaissant dans  $w$ . Un facteur ou sous-mot d'un mot infini est défini de la même manière.

Un ensemble de mots sur  $A$  est appelé un langage. Si  $U$  est un langage sur  $A$ , on désigne par  $U^*$  l'ensemble suivant :

$$U^* = \{w \in A^* \mid w = u_0 u_1 \dots u_n, u_i \in U\}.$$

L'ensemble des sous-mots d'un mot  $x$  de longueur  $n$  est noté  $L_n(x)$  et l'ensemble des sous-mots de  $x$  est noté  $L(x)$  ou  $L_x$ .

Soit  $S : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  désignant la transformation shift, définie par  $S((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ . Un subshift sur  $A$  est un système dynamique donné par la paire  $(X, S)$ , où  $X$  est un sous-ensemble fermé invariant par  $S$  de  $A^{\mathbb{Z}}$  muni de la topologie induite. On utilise le terme subshift pour nommer indifféremment l'espace  $X$  et le couple  $(X, S)$ . Soit  $x \in A^{\mathbb{Z}}$ , on définit  $(X_x, S)$  comme le subshift généré par  $x$ , qui est

$$X_x = \{y \in A^{\mathbb{Z}} : \forall w, w \prec y \Rightarrow w \prec x\},$$

où le symbole  $\prec$  signifie "est facteur de". De manière équivalente  $X_x$  est la fermeture de l'orbite de  $x$  sous l'action du shift  $S$ .

**Définition 2.9.** La suite  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  définie par  $p_n(x) = \text{Card}(L_n(x))$  est le facteur de complexité (ou la complexité du mot ou simplement la complexité) de  $x$ .

**Propriété 2.10.**

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_n(x) \leq p_{n+1}(x),$$

$$p_{n+m}(x) \leq p_n(x)p_m(x) \quad \forall n, m \geq 0.$$

**Théorème 2.11.** *Morse, Hedlund*

Soit  $x$  une séquence bi-infinie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour un certain  $n \geq 1$ ,  $p_n(x) \leq n$ .
- (ii) Pour un certain  $n \geq 1$ ,  $p_n(x) = p_{n+1}(x)$ .
- (iii)  $x$  est périodique.

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Puisque  $p_0(x) = 1$  et que  $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$  pour tout  $n \geq 0$ , l'hypothèse implique que  $p_n(x) = p_{n+1}(x)$  pour un certain  $n \geq 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Pour tout  $w \in L_n(x)$  il y a une unique lettre  $a \in A$  telle que  $wa \in L_{n+1}(x)$ . Cela implique que deux occurrences consécutives d'un mot  $u$  de longueur  $n$  dans  $x$  sont séparées par un mot fixe dépendant uniquement de  $u$  et donc  $x$  est périodique.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Évident. □

**2.4.2 Le langage d'un espace de shift**

**Définition 2.12.** Soit  $X$  un espace de shift. Le langage de  $X$  est l'ensemble  $L(X) = \cup_{x \in X} L(x)$ . On note aussi  $L_n(X) = \cup_{x \in X} L_n(x)$  ainsi que  $p_n(X) = \text{Card}(L_n(X))$  appelé facteur de complexité ou simplement complexité de  $X$ . Et de même  $p_0(X) = 1$ ,  $p_n(X) \leq p_{n+1}(X)$ .

*Remarque 2.6.* La complexité est un marqueur qui va nous intéresser par la suite. Remarquons déjà que le facteur n'est pas conservé par conjugaison, car l'alphabet peut lui-même changer.

On adapte le dernier théorème avec les nouvelles définitions.

**Théorème 2.13.** *Soit  $X$  un espace de shift. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Pour un certain  $n \geq 1$ ,  $p_n(X) \leq n$ .
- (ii) Pour un certain  $n \geq 1$ ,  $p_n(X) = p_{n+1}(X)$ .



(iii)  $X$  est fini.

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Puisque  $p_0(X) = 1$  et que  $p_n(X) \leq p_{n+1}(X)$  pour tout  $n \geq 0$ , l'hypothèse implique qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $p_n(X) = p_{n+1}(X)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Par le théorème précédent chaque  $x \in X$  est périodique et sa période est majorée par  $\max p_n(X)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $X$  est fini alors sa complexité est bornée.  $\square$

### 2.4.3 Shifts Toeplitz

Nous allons maintenant introduire les Toeplitz qui constituent une partie essentielle pour la suite.

**Définition 2.14.** Une séquence  $x = (x_n)_{n \in K}$  avec  $K = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$  sur un alphabet  $A$  qui satisfait pour tout  $n \in K$ ,

$$\exists p \geq 0, \forall k \geq 0, x_n = x_{n+kp},$$

est appelée une séquence Toeplitz.

Un subshift  $(X, S)$  est appelé subshift Toeplitz si  $X$  est la fermeture sous l'action du shift d'une séquence Toeplitz.

*Remarque 2.7.* Un subshift Toeplitz contient donc des éléments qui ne sont pas des Toeplitz.

*Remarque 2.8.* Les systèmes Toeplitz sont des systèmes de Cantor minimaux.

## 3 Groupes de dimension

### 3.1 Groupes abéliens ordonnés

Nous allons maintenant introduire la notion de groupe de dimension qui va constituer un invariant majeur de notre étude.

Pour cela, nous allons tout d'abord définir la notion de groupe ordonné.

**Définition 3.1.** Un groupe ordonné est une paire  $(G, G^+)$  où  $G$  est un groupe abélien dénombrable et  $G^+$  un sous-ensemble de  $G$  appelé cône positif de  $G$ . Il satisfait

$$G^+ + G^+ \subset G^+, \quad G^+ \cap (-G^+) = \{0\}.$$

On écrit  $a \leq b$  si  $b - a \in G^+$  et  $a < b$  si  $b - a \in G^+$  et  $b \neq a$ .

**Définition 3.2.** Soient  $(G, G^+)$ ,  $(H, H^+)$  deux groupes ordonnés. Un morphisme  $\phi : G \rightarrow H$  est positif si  $\phi(G^+)$  est un sous-ensemble de  $H^+$ .

Deux groupes ordonnés  $(G, G^+)$  et  $(H, H^+)$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupe  $\phi : G \rightarrow H$  tel que  $\phi(G^+) = H^+$ .

Un morphisme est positif si et seulement s'il préserve les ordres sur  $G$  et  $H$ , c'est-à-dire  $g \leq g'$  implique  $\phi(g) \leq \phi(g')$ .

**Définition 3.3.** Un sous-groupe d'un groupe ordonné  $(G, G^+)$  est une paire  $(H, H^+)$  où  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et  $H^+ = H \cap G^+$ .

Un tel sous-groupe est lui-même un groupe ordonné. De cette manière, l'ordre du sous-groupe est simplement la restriction de l'ordre du groupe.

Un groupe ordonné  $G$  est orienté si pour tout  $x, y \in G$  il existe  $z \in G$  tel que  $x, y \leq z$ . En d'autres termes,  $G$  est orienté si toute paire d'éléments a une borne commune.

**Propriété 3.4.** Un groupe ordonné  $G$  est orienté si et seulement s'il est généré par  $G^+$ , c'est-à-dire  $G = G^+ - G^+$ .

*Démonstration.* Supposons que  $G^+$  génère  $G$ . Pour  $x, y \in G$ , il existe  $z, t, u, v \in G^+$  tels que  $x = z - t$ ,  $y = u - v$ . Donc  $w = z + u$  est tel que  $x, y \leq w$ . Réciproquement, pour tout  $x \in G$ , considérons la paire  $0, x$  il existe  $y \in G$  tel que  $0, x \leq y$ . Donc  $x = y - (y - x)$  appartient à  $G^+ - G^+$ .  $\square$

*Remarque 3.1.* Dans la plupart des ouvrages la définition de groupe ordonné est directement donnée avec le caractère orienté.

Un sous-groupe d'un groupe orienté n'est pas forcément orienté comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple 3.1.* Soit  $G = \mathbb{Z}^2$  avec le cône positif  $G^+ = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ .  $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$  est un sous-groupe d'un groupe orienté. Mais il n'est pas orienté car  $H^+ = \{0\}$ .

## 3.2 Idéaux et groupes ordonnés simples

**Définition 3.5.** Un idéal ordonné  $J$  d'un groupe ordonné  $(G, G^+)$  est un sous-groupe  $J$  de  $G$  tel que  $J = J^+ - J^+$  (avec  $J^+ = J \cap G^+$ ) et tel que  $0 \leq a \leq b$  avec  $b \in J$  implique  $a \in J$ .

Une face de  $G$  est un sous-ensemble  $F$  de  $G^+$  qui est un sous-monoïde et tel que  $a \leq b \in F$  implique  $a \in F$ .

**Propriété 3.6.** Soit  $(G, G^+)$  un groupe ordonné.

1. Pour tout  $g \in G$ , l'ensemble

$$[g] = \{h \in G \mid 0 \leq h \leq ng \text{ pour } n \geq 0\}$$

est une face.

2. Pour toute face  $F$ , le sous-groupe  $J = F - F$  satisfait  $J \cap G^+ = F$  et il est le plus petit idéal ordonné de  $G$  contenant  $F$ .

*Démonstration.* 1. Si  $h, k \in [g]$ , alors  $h \leq ng$  et  $k \leq mg$  pour  $n, m \geq 0$ . Puisque  $h + k \leq (n + m)g$  alors  $h + k$  appartient à  $[g]$ . De plus  $[g]$  est un sous-monoïde. Si  $0 \leq h \leq k$  avec  $n \geq 0$  tel que  $k \leq ng$ , alors  $0 \leq h \leq ng$  et donc  $h$  est dans  $[g]$ . Cela montre que  $[g]$  est une face.

2. L'ensemble  $J = F - F$  est clairement un sous-groupe. L'ensemble  $J^+ = J \cap G^+$  est égal à  $F$ . En effet  $F \subset J^+$  par définition. Réciproquement si  $h \in J^+$ ,  $h = a - b$  avec  $a, b \in F$ .  $h \leq a$  implique  $h \in F$  puisque  $F$  est une face. Cela montre que  $J$  est un idéal. Finalement, si  $K$  est un idéal contenant  $F$ , alors  $J \subset K$  puisque  $K$  est un sous-groupe.  $\square$

**Définition 3.7.** Un groupe ordonné est simple s'il n'a pas d'idéal propre non trivial.

*Remarque 3.2.* Un groupe simple qui n'est pas trivial est orienté puisque  $G^+ - G^+$  est un idéal de  $(G, G^+)$  et donc  $G^+ - G^+ = G$ .

**Propriété 3.8.** Un sous-groupe d'un groupe simple est simple.

*Démonstration.* Soit  $(H, H^+)$  un sous-groupe du groupe simple  $(G, G^+)$ . Soit  $J$  un idéal propre non trivial de  $H$ . Soit  $k$  un élément non nul de  $J^+$ . Alors  $F = \{h \in G \mid h \leq nk \text{ pour } n \geq 0\}$  est une face d'après la proposition précédente. Par cette même proposition  $K = F - F$  est un idéal et  $K \cap G^+ = F$ . Puisque  $G$  est simple,  $K = G$  et  $F = G^+$ . Ceci conduit à ce que tout  $h \in H^+$  est aussi dans  $F$  et donc dans  $J$ , ce qui montre que  $J = H$ . Finalement  $H$  est simple.  $\square$

**Définition 3.9.** Une unité d'ordre d'un groupe ordonné  $G$  est un élément positif  $u$  tel que pour tout  $g \in G^+$ , il existe un entier  $n > 0$  tel que  $g < nu$ . De manière équivalente,  $u$  est une unité d'ordre si l'ensemble  $[u]$  est égal à  $G^+$ .

Un groupe ordonné unitaire est donc un triplet  $(G, G^+, u)$  formé d'un groupe ordonné  $(G, G^+)$  et d'une unité d'ordre  $u$ .

**Propriété 3.10.** Un groupe ordonné orienté  $(G, G^+)$  est simple si et seulement si tout élément non nul de  $G^+$  est une unité d'ordre.

On définit des morphismes pour cette structure enrichie si c'est un morphisme de groupes ordonnés et si  $\phi(u) = v$  avec  $u$  et  $v$  les unités de  $G$  et  $H$ . On définit de même de manière naturelle la notion de sous-groupes ordonnés unitaires.

### 3.3 Limite directe de groupes abéliens

Soit  $(G_n)_{n \geq 0}$  une suite de groupes abéliens et  $i_{n+1,n} : G_n \rightarrow G_{n+1}$  un morphisme de groupes pour tout  $n \geq 0$ . On considère aussi les ensembles

$$\Delta = \{(g_n)_{n \geq 0} \mid g_n \in G_n, g_{n+1} = i_{n+1,n}(g_n) \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}$$

et

$$\Delta^0 = \{(g_n)_{n \geq 0} \mid g_n \in G_n, g_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}$$

qui sont des sous-groupes du produit direct  $\prod_{n \geq 0} G_n$ . On remarque que  $\Delta^0 \subset \Delta$ .

**Définition 3.11.** Soit  $G$  le groupe quotient  $G = \Delta/\Delta^0$  et  $\pi : \Delta \rightarrow G$  la projection naturelle. Le groupe  $G$ , noté  $G = \lim G_n$ , est appelé limite directe de la suite  $(G_n)_{n \geq 0}$  avec les applications  $i_{n+1,n}$ .

Les applications  $i_{n+1,n}$  et plus généralement les applications  $i_{m,n} = i_{m,m_1} \circ \dots \circ i_{n+1,n}$  sont appelées les morphismes connectants.

**Propriété 3.12.** Soit  $(G_n)_{n \geq 0}$  une suite de groupes abéliens avec des applications connectantes. Pour tout groupe abélien  $H$  et toute suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  de morphisme de  $G_n$  à  $H$  telle que  $\alpha_n = \alpha_{n+1} \circ i_{n+1,n}$ , il existe un unique morphisme  $\phi$  de la limite directe  $G = \lim G_n$  à  $H$  tel que  $\alpha_n = \phi \circ i_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

### 3.4 Limite directe de groupe abéliens ordonnés

Prenons maintenant  $((G_n, G_n^+, u_n))_{n \geq 0}$  une suite de groupes abéliens ordonnés unitaires et  $i_{n+1,n} : G_n \rightarrow G_{n+1}$  un morphisme de groupes ordonnés unitaires pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $G$  la limite directe de la suite  $G_n$ ,  $G^+$  la projection de l'ensemble

$$\Delta^+ = \{(g_n)_{n \geq 0} \mid g_n \in G_n^+ \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}$$

et  $u$  la projection de la suite  $(u_n)_{n \geq 0} \in \Delta$ .

**Propriété 3.13.** Le triplet  $(G, G^+, u)$  est un groupe ordonné orienté unitaire.

*Démonstration.* Vérifions que  $G^+$  satisfait les deux conditions qui définissent un groupe ordonné. Tout d'abord, si  $g, g'$  appartiennent à  $\Delta^+$  alors  $g_n, g'_n$  appartiennent à  $G_n^+$  pour  $n$  assez grand et alors  $g_n + g'_n$  appartient aussi à  $G_n^+$  pour  $n$  assez grand. Il s'ensuit que  $g + g'$  appartient à  $\Delta^+$ . Cela montre que  $\Delta^+ + \Delta^+$  est inclus dans  $\Delta^+$  et implique que  $G^+ + G^+$  est un sous-ensemble de  $G^+$ . De la même manière, le fait que  $G = G^+ - G^+$  et  $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$  provient du fait que  $\Delta = \Delta^+ - \Delta^+$  et  $\Delta^+ \cap (-\Delta^+) = \Delta^0$ .

Montrons ensuite que  $u$  est une unité. Soit  $g = (g_n) \in \Delta$ . Si  $g_{n+1} = i_n(g_n)$  pour  $n \geq 0$  et si  $g_n \leq ku_n$  pour  $k \geq 1$ , alors, puisque  $i_{n+1,n}$  est un morphisme de groupes ordonnés unitaires,  $g_{n+1} \leq ku_{n+1}$ . Il existe donc  $k \geq 1$  tel que  $g_n \leq ku_n$  pour tout  $n$  assez grand. Cela implique que la projection de  $g$  dans  $G$  est majorée par  $ku$ .  $\square$

**Définition 3.14.** Le triplet  $(G, G^+, u)$  est appelé limite directe (ou limite inductive) de la suite  $(G_n, G_n^+, u_n)$ .

La propriété universelle énoncée précédemment tient toujours pour une limite directe de groupes ordonnés unitaires.

### 3.5 Groupes de dimension

**Définition 3.15.** Un groupe de dimension est la limite directe de

$$\mathbb{Z}^{k_1} \rightarrow \mathbb{Z}^{k_2} \rightarrow \dots$$

où le morphisme connectant  $\mathbb{Z}^{k_i} \rightarrow \mathbb{Z}^{k_{i+1}}$  est donné par une matrice  $M_i$

positive et où l'unité de chaque  $\mathbb{Z}^{k_i}$  est  $(1, \dots, 1)$ .

**Propriété 3.16.** Le groupe de dimension est simple si et seulement si toutes les matrices  $M_i$  peuvent être choisies positives.

*Remarque 3.3.* Un groupe de dimension est donc un groupe ordonné unitaire. Il existe un théorème permettant de caractériser les groupes de dimension.

**Théorème 3.17.** *Effros, Handelman et Shen*

*Un groupe ordonné dénombrable est un groupe de dimension si et seulement si c'est un groupe de Riesz non perforé orienté.*

Nous ne donnerons pas plus de détails quant au vocabulaire de ce théorème ou quant à sa preuve.

### 3.6 Cofrontières et groupes de dimension

**Définition 3.18.** Soit  $(X, T)$  un système dynamique, notons  $C(X, \mathbb{R})$  le groupe additif des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application cofrontière  $\beta : C(X, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$  est définie par  $\beta f := f \circ T - f$ .

L'application cofrontière est un endomorphisme du groupe  $C(X, \mathbb{Z})$ , son image est donc un sous-groupe.

**Définition 3.19.** On note  $H(X, T, \mathbb{Z})$  le groupe quotient

$$H(X, T, \mathbb{Z}) = C(X, \mathbb{Z}) / \beta C(X, T, \mathbb{Z})$$

et  $H^+(X, T, \mathbb{Z})$  l'image de  $C(X, \mathbb{Z}_+)$  dans le quotient.

On définit aussi

$$K^0(X, T) = (H(X, T, \mathbb{Z}), H^+(X, T, \mathbb{Z}), 1_X),$$

où  $1_X$  est l'image dans  $H(X, T, \mathbb{Z})$  de la fonction constante égale à 1 sur  $X$ .

**Propriété 3.20.** Pour tout système dynamique transitif  $(X, T)$  le triplet  $K^0(X, T)$  est un groupe ordonné unitaire.

**Théorème 3.21.** *Herman, Putnam, Skau*

*Si  $(X, T)$  est un système de Cantor minimal, le triplet  $K^0(X, T)$  est un groupe de dimension simple et unitaire. De plus, si  $(G, G^+, u)$  est un groupe de dimension simple et unitaire, alors il existe un système de Cantor minimal  $(X, T)$  tel que  $K^0(X, T)$  est isomorphe à  $(G, G^+, u)$  en tant que groupes ordonnés unitaires.*

### 3.7 Équivalence orbitale

**Définition 3.22.** Deux systèmes minimaux  $(X_1, T_1)$  et  $(X_2, T_2)$  sont dits orbitalement équivalents s'il existe un homéomorphisme  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  qui envoie les orbites sous l'action de  $T_1$  sur les orbites de l'action de  $T_2$ , c'est-à-dire

$$\phi(\{T_1^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}) = \{T_2^k \phi(x) : k \in \mathbb{Z}\} \text{ pour tout } x \in X_1.$$

*Remarque 3.4.* Deux systèmes équivalents orbitalement ont les mêmes orbites, et donc les mêmes propriétés statistiques.

L'équivalence orbitale implique l'existence de deux applications  $n_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $n_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  (définies de manière unique par minimalité) telles que, pour tout  $x_1 \in X_1$ ,

$$\phi \circ T_1(x) = T_2^{n_1(x)} \phi(x) \text{ et } \phi \circ T_1^{n_2(x)}(x) = T_2 \circ \phi(x).$$

**Définition 3.23.** Les systèmes  $(X_1, T_1)$  et  $(X_2, T_2)$  sont fortement équivalents orbitalement si  $n_1$  et  $n_2$  ont toutes les deux au moins un point de discontinuité.

*Remarque 3.5.* Il a été montré par Boyle que si  $n_1$  et  $n_2$  étaient toutes les deux continues, alors les deux systèmes étaient flip conjugués, c'est-à-dire que  $(X_1, T_1)$  est conjugué à  $(X_2, T_2)$  ou à  $(X_2, T_2^{-1})$ . De plus, si les espaces sont connexes, il est clair que l'équivalence orbitale implique la conjugaison flip. Cela a comme conséquence que l'étude de l'équivalence orbitale n'est intéressante que sur des espaces de Cantor.

Voici l'un des théorèmes les plus importants de cette étude.

**Théorème 3.24.** *Giordano, Putnam, Skau*

*Soient  $(X_1, T_1)$  et  $(X_2, T_2)$  deux systèmes de Cantor minimaux. Alors  $(X_1, T_1)$  et  $(X_2, T_2)$  sont fortement équivalents orbitalement si et seulement si  $K^0(X_1, T_1)$  et  $K^0(X_2, T_2)$  sont isomorphes en tant que groupes ordonnés unitaires.*

*Remarque 3.6.* Les groupes de dimension sont donc un invariant complet pour l'équivalence orbitale forte.

## 4 Diagrammes de Bratteli

### 4.1 Diagrammes de Bratteli

Les diagrammes de Bratteli sont une manière très pratique de représenter les systèmes de Cantor minimaux réversibles. Cette représentation a la particularité de pouvoir mieux visualiser et étudier les groupes de dimension associé aux espaces.

**Définition 4.1.** Un diagramme de Bratteli est un graphe infini  $B = (V, E)$  où l'ensemble des sommets  $V$  et  $E$  l'ensemble des arêtes peuvent être partitionnés en des ensembles finis non vides,

$$V = V(0) \cup V(1) \cup V(2) \cup \dots \text{ et } E = E(1) \cup E(2) \cup \dots$$

avec les propriétés suivantes :

1.  $V(0) = \{v(0)\}$ ,
2.  $r(E(n)) \subseteq V(n)$ ,  $s(E(n)) \subseteq V(n-1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

où  $r : E \rightarrow V$  est appelée application d'arrivée et  $s : E \rightarrow V$  application source. Elles satisfont  $s^{-1}(\{v\}) \neq \emptyset$  pour tout  $v \in V$  et  $r^{-1}(\{v\}) \neq \emptyset$  pour tout  $v \in V \setminus V(0)$ .

*Remarque 4.1.* Puisque les arêtes ne peuvent aller que de  $V(n)$  vers  $V(n+1)$  le graphe est acyclique. Le sommet  $v(0)$  est appelé la racine. Un successeur d'un sommet  $v \in V$  est un sommet  $w$  tel que  $v = s(e)$  et  $w = r(e)$  pour un  $e$  dans  $E$ . Deux arêtes  $e, f \in E$  sont consécutives si  $r(e) = s(f)$ . Un chemin est une suite  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  d'arêtes consécutives. La source du chemin est  $s(e_1)$  et son arrivée  $r(e_n)$ . Un descendant d'un sommet  $v$  est un sommet  $w$  tel qu'il existe un chemin entre  $v$  et  $w$  avec pour source  $v$  et arrivée  $w$ .

On représente un diagramme de Bratteli avec l'ensemble  $V(n)$  des sommets à l'horizontal au niveau  $n$ , et l'ensemble  $E(n)$  des arêtes, dirigées vers le bas,



connectant les niveaux  $n - 1$  et  $n$ . De plus un diagramme de Bratteli est un graphe orienté mais on ne dessine pas les flèches puisque l'orientation est implicite.

**Définition 4.2.** La matrice d'adjacence  $M(n)$  est la matrice de taille  $V(n) \times V(n - 1)$  définie pour tout  $n \geq 1$  par

$$M(n)_{r,s} = \text{Card}\{e \in E(n) \mid r(e) = r, s(e) = s\}.$$

*Remarque 4.2.*  $M(n)$  n'est pas exactement la matrice d'adjacence classique du graphe  $(V, E)$  mais sa transposée.

**Définition 4.3.** On dit que deux diagrammes de Bratteli  $(V, E)$  et  $(V', E')$  sont isomorphes lorsqu'il existe un paire de bijections  $f : V \rightarrow V'$  préservant les degrés et  $g : E \rightarrow E'$  faisant commuter respectivement les applications d'arrivée et de source :

$$s' \circ g = f \circ s \text{ et } r' \circ g = f \circ r.$$

Soit  $k, l \in \mathbb{N}$  avec  $1 \leq k < l$  et soit  $E_{k,l}$  l'ensemble des chemins de  $V(k - 1)$  à  $V(l)$ . C'est-à-dire,

$$E_{k,l} = \{(e_k, \dots, e_l) \mid e_i \in E(i), k \leq i \leq l, r(e_i) = s(e_{i+1}), k \leq i \leq l - 1\}.$$

Remarquons que la matrice d'adjacence de  $E_{k,l}$  est  $M(l) \dots M(k)$ . Par conséquent, le nombre de chemins de  $s \in V(k - 1)$  à  $r \in V(l)$  est  $(M(l) \dots M(k))_{r,s}$ . On définit  $r(e_k, \dots, e_l) = r(e_l)$  et  $s(e_k \dots e_l) = s(e_k)$ .

**Définition 4.4.** Un diagramme de Bratteli est stationnaire s'il existe  $k$  tel que  $k = \text{Card}(V(n))$  pour tout  $n$ , et si la matrice d'adjacence entre les niveaux  $n$  et  $n + 1$  sont les mêmes  $k \times k$  matrices pour tout  $n = 1, 2, \dots$ . En d'autres termes, à partir du niveau 1, le diagramme se répète. La matrice  $M$  est appelée matrice du diagramme stationnaire.

## 4.2 Télésopage et diagramme simple

**Définition 4.5.** Soit  $(V, E)$  un diagramme de Bratteli et une suite  $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \dots$  d'entiers, on définit le télésopage de  $(V, E)$  par rapport à  $(m_n)$  comme le nouveau diagramme de Bratteli  $(V', E')$ , où  $V'(n) = V(m_n)$  et  $E'(n) = E_{m_{n-1}+1, m_n}$ .

**Définition 4.6.** On dit que  $(V, E)$  est un diagramme de Bratteli simple s'il existe un télescopage  $(V', E')$  de  $(V, E)$  tel que les matrices d'adjacences de  $(V', E')$  n'aient que des coefficients non nuls à chaque niveau.

Nous allons maintenant utiliser deux nouvelles définitions pour pouvoir caractériser les diagrammes simples.

Soit  $(V, E)$  un diagramme. Un ensemble  $W \subset V$  est orienté si toute arête qui a sa source dans  $W$  a aussi son arrivée dans  $W$ .

Il est héréditaire si pour tout  $v \in V$  la condition suivante est vérifiée. Si toute arête de source  $v$  à son arrivée dans  $W$  alors  $v$  lui-même est dans  $W$ .

**Propriété 4.7.** Un diagramme de Bratteli est simple si et seulement s'il n'y a pas d'ensemble non vide  $W \subset V$  qui soit à la fois orienté et héréditaire autre que  $V$ .

*Démonstration.* Soit  $B = (V, E)$ . Supposons que  $B$  est simple. Soit  $W \subset V$  un ensemble non vide orienté et héréditaire. Puisque  $W$  est non vide, il existe  $w \in W$ . Soit  $n$  tel que  $w \in V(n)$ . Puisque  $B$  est simple, il existe  $m > n$  tel qu'il existe un chemin de  $W$  à chaque sommet de  $V(m)$ .  $W$  étant orienté, cela implique  $V(m) \subset W$ . De plus  $W$  est héréditaire donc tout sommet de  $V(n)$  pour  $n \leq m$  est dans  $W$ . Finalement comme  $v(0) \in W$  cela implique que  $V = W$ .

Réciproquement, supposons que  $B$  n'est pas simple. Soit  $v \in V(n)$  tel que pour tout  $m > n$  il existe  $w \in V(m)$  pour lequel il existe  $p = p(w)$  tel que tous les descendants de  $w$  dans  $V(p)$  soient des descendants de  $v$ . C'est un ensemble orienté par définition. Supposons qu'une arête  $w \in V$  est telle que tous ses successeurs appartiennent à  $W$ . Soit  $p$  le maximum des entiers  $p(u)$  pour  $u$  successeur de  $w$ . Alors tous les descendants de  $w$  dans  $V(p)$  sont descendants de  $v$  et donc  $w$  est dans  $W$ . Cela montre que  $W$  est héréditaire. Finalement, il existe au moins une arête dans  $V(n)$  qui n'est pas dans  $W$  car sinon en prenant le maximum  $p$  des entiers  $p(u)$  pour  $u \in V(n)$ , on trouve que tous les sommets de  $V(p)$  sont descendants de  $v$ . Il suit que  $W$  est un ensemble non vide orienté et héréditaire strictement contenu dans  $V$ .  $\square$

### 4.3 Groupe de dimension d'un diagramme de Bratteli

Soit  $(V, E)$  un diagramme de Bratteli. Soit  $G(n) = \mathbb{Z}^{V(n)}$  et  $h_v(n)$  le nombre de chemins partant de  $V(0)$  à  $v \in V(n)$ . Soit  $h(n) = (h_v(n))_{v \in V(n)}$ . Par définition de  $M(n)$ , on a pour  $n \geq 2$ ,

$$h(n) = M(n)h(n-1),$$

avec  $h(n)$  considéré comme un vecteur colonne. On considère  $G(n)$  comme un groupe ordonné unitaire avec l'ordre usuel et l'unité  $h(n)$ .

**Définition 4.8.** Le groupe de dimension de  $B = (V, E)$ , noté  $DG(B)$ , est la limite directe de la suite

$$G(0) \rightarrow G(1) \rightarrow G(2) \dots$$

avec  $M(i) : G(i-1) \rightarrow G(i)$  définie par les matrices d'adjacence agissant sur les éléments de  $G(i-1)$  vu comme des vecteurs colonnes.

*Remarque 4.3.* L'équation entre  $h(n)$  et  $M(n)$  montre que  $M(n)$  définit un morphisme de groupe ordonné unitaire entre  $G(n-1)$  et  $G(n)$ .

**Théorème 4.9.** Deux diagrammes de Bratteli  $B = (V, E)$  et  $B' = (V', E')$  sont téléscopiquement équivalents si et seulement si les groupes ordonnés unitaires  $DG(B)$  et  $DG(B')$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Considérons une suite  $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \dots$  et le télescope correspondant  $B' = (V', E')$ . Le groupe de dimension de  $B'$  est la limite directe de la suite

$$G'(0) \rightarrow G'(1) \rightarrow \dots,$$

où  $G'(n) = G(m_n)$  et  $M'(n) = M(m_n) \dots M(m_{n-1} + 1)$ . Cela ne change pas la limite directe et donc le télescope ne change pas le groupe de dimension.

Réciproquement, soit  $G = DG(B)$  et  $G' = DG(B')$ . Nous devons construire un diagramme de Bratteli  $C = (W, F)$  qui donne  $B$  en téléscopant les niveaux pairs et  $B'$  en faisant de même pour les impairs. Il suffit donc de donner l'ensemble des sommets  $W(n)$  et les matrices d'adjacences  $N(n)$  entre les niveaux consécutifs.

On définit  $W(1) = V(1)$  et  $N(1) = M(1)$ . En regardant les générateurs canoniques de  $\mathbb{Z}^{V(1)}$  comme des éléments de  $G'$ , on peut considérer que ce sont des éléments d'un certain  $\mathbb{Z}^{V'(n_2)}$ . On définit  $W(2) = V'(n_2)$  et notons  $N(2)$  la matrice de l'application qui est définie de  $\mathbb{Z}^{V(1)}$  à  $\mathbb{Z}^{V'(n_2)}$ . De même, les éléments de  $\mathbb{Z}^{V'(n_2)}$  peuvent être considérés comme des éléments de  $G$  et donc appartiennent à un certain  $\mathbb{Z}^{V(n_3)}$ . On pose  $W(3) = V(n_3)$  et on appelle  $N(3)$  l'application qui est définie entre  $\mathbb{Z}^{V'(n_2)}$  et  $\mathbb{Z}^{V(n_3)}$ . En procédant de cette façon on obtient une suite

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{V(1)} \rightarrow \mathbb{Z}^{V'(n_2)} \rightarrow \mathbb{Z}^{V(n_3)} \dots,$$

avec les matrices  $N(i)$ , ce qui est suffisant pour définir le diagramme de Bratteli  $C$  que nous cherchions. □

**Propriété 4.10.** Un diagramme de Bratteli est simple si et seulement si son groupe de dimension est simple.

*Démonstration.* Soit  $B = (V, E)$  un diagramme de Bratteli et  $G = DG(B)$ . Supposons tout d'abord que  $B$  est simple. Nous allons montrer que dans ce cas tout élément non nul  $g \in G^+$  est une unité d'ordre. En effet, soit  $g \in G^+$  non nul et  $h \in G^+$ . Soit  $v \in V(n)$  tel que  $x_v > 0$ . Puisque  $B$  est simple, nous avons  $M(m)\dots M(n+1)x > 0$  pour tout  $m$  assez grand. Ensuite  $M(m)\dots M(n+1)y \leq NM(m)\dots M(n+1)x$  pour tout  $N$  assez grand. Cela implique que  $h < Ng$  et donc  $G$  est simple.

Réciproquement, supposons que  $B$  n'est pas simple. Soit  $W$  une partie non vide orientée et héréditaire strictement contenue dans  $V$ . Soit  $H$  l'ensemble des  $h \in DG(B)$  défini par une suite  $x = (x_n)$  avec  $x_n \in \mathbb{Z}^{V(n)}$  ayant la propriété que pour certains  $n \geq 1$ ,  $x_{n,v} = 0$  pour tout  $v \notin W$  et  $x_{m+1} = M(m+1)x(m)$  pour tout  $m \geq n$ . Puisque  $W$  est orienté, toute matrice  $M(m)$  a un bloc de zéros en bas à gauche. Il s'ensuit que si  $x$  satisfait la proposition pour  $n$ , c'est aussi le cas pour  $m \geq n$ . Alors  $H$  est un sous-groupe de  $G$  qui est clairement un idéal. Puisque  $W \neq \emptyset$ , nous pouvons choisir  $w \in W \cap V(n)$  et  $x$  tel que  $x_{n,w} > 0$ . Alors  $x_{m,v} > 0$  pour tout descendant de  $w$ , ce qui implique que la classe de  $x$  n'est pas 0. De plus,  $H \neq \{0\}$ . Puisque  $W$  est strictement contenu dans  $V$  et qu'il est héréditaire,  $H \neq G$ . D'où  $G$  est simple.  $\square$

#### 4.4 Diagrammes de Bratteli ordonnés

**Définition 4.11.** Un diagramme de Bratteli ordonné  $(V, E, \leq)$  est un diagramme de Bratteli  $(V, E)$  muni d'un ordre partiel  $\leq$  tel que deux arêtes  $e, e'$  dans  $E$  sont comparables si et seulement si  $r(e) = r(e')$ , autrement dit l'ordre est total sur chaque ensemble  $r^{-1}(v)$  où  $v \in V \setminus V(0)$ .

Si  $(V, E, \leq)$  est un diagramme orienté et  $k < l$  dans  $\mathbb{Z}_+$ , alors l'ensemble  $E_{k+1,l}$  des chemins de  $V(k)$  à  $V(l)$  est doté d'un ordre induit, appelé l'ordre lexicographique inverse, défini comme suit :

$$(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l) < (f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_l)$$

si et seulement s'il existe  $i$  tel que  $k+1 \leq i \leq l$ ,  $e_j = f_j$  et pour  $i < j \leq l$ ,  $e_i < f_i$ .

*Remarque 4.4.* L'ordre induit sur un télescope fait du télescope un diagramme de Bratteli orienté.

On définit de même une notion d'isomorphisme des diagrammes comme précédemment en rajoutant le fait que les ordres coïncident.

## 5 Liens entre systèmes dynamiques et diagrammes de Bratteli

### 5.1 Dynamique des diagrammes de Bratteli ordonnés

#### 5.1.1 Le compact de Bratteli

**Définition 5.1.** Soit  $(V, E, \leq)$  un diagramme de Bratteli ordonné. On note  $X_E$  l'espace des chemins infinis.

$$X_E = \{(e_1, e_2, \dots) \mid e_i \in E(i), r(e_i) = s(e_{i+1}), i = 1, 2, \dots\}.$$

Deux chemins de  $X_E$  sont dits cofinaux s'ils ont la même queue, c'est-à-dire, qu'à partir d'un certain rang les arêtes sont les mêmes. On note  $R_E$  cette équivalence appelée équivalence de cofinalité sur l'ensemble  $X_E$ . Nous verrons que la cofinalité est une notion importante pour définir la dynamique sur un diagramme.

L'ensemble  $X_E$  est un fermé de  $\prod_{i \geq 1} E(i)$ . Puisque tous les  $E(i)$  sont finis, le produit est compact et donc  $X_E$  est compact. Une base de la topologie est la famille des cylindres

$$[e_1, e_2, \dots, e_k]_E = \{f_1, f_2, \dots\} \in X_E \mid f_i = e_i, 1 \leq i \leq k\}.$$

Muni de cette topologie, nous appelons  $X_E$  le compact de Bratteli associé à  $(V, E, \leq)$ .

*Remarque 5.1.* Cette topologie est métrisable en définissant  $d_E((e_n), (f_n)) = \frac{1}{2^k}$  où  $k = \inf\{i \mid E_i \neq f_i\}$ .

**Propriété 5.2.** Si  $(V, E)$  est simple alors  $X_E$  est fini ou  $X_E$  n'a pas de points isolés et c'est donc un espace de Cantor. De plus chaque classe d'équivalence de  $R_E$  est dense dans  $X_E$ .

**Définition 5.3.** Soit  $x = (e_1, e_2, \dots)$  un élément de  $X_E$ . On dit que  $e_n$  est la  $n$ -ième étiquette de  $x$  et le note  $x(n)$ . On définit  $X_E^{\max}$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $X_E$  tels que  $x(n)$  est une arête maximale pour tout  $n$  et on définit  $X_E^{\min}$  de manière analogique pour les arêtes minimales.

*Remarque 5.2.* Les ensembles  $X_E^{\max}$  et  $X_E^{\min}$  sont non vides.

**Définition 5.4.** Un diagramme de Bratteli ordonné est proprement ordonné s'il est simple et que  $X_E^{\max}$  et  $X_E^{\min}$  contiennent chacun un seul élément.

**Propriété 5.5.** Tout diagramme de Bratteli simple peut être proprement ordonné.

### 5.1.2 L'application de Vershik

Nous pouvons maintenant définir pour un diagramme de Bratteli  $(V, E, \leq)$  proprement ordonné une application  $T_E : X_E \rightarrow X_E$ , appelée l'application de Vershik associée à  $(V, E, \leq)$ .

On définit  $T_E(x_{\max}) = x_{\min}$ . Si  $x = (e_1, e_2, \dots) \neq x_{\max}$ , on pose  $k$  le plus petit entier tel que  $e_k$  ne soit pas l'arête minimale. Soit  $f_k$  le successeur de  $e_k$  (relativement à l'ordre  $\leq$  tel que  $r(e_k) = r(f_k)$ ). On définit

$$T_E(x) = (f_1, \dots, f_{k-1}, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots),$$

où  $(f_1, \dots, f_{k-1})$  est l'arête minimale dans  $E_{1,k-1}$  avec arrivée égale à  $s(f_k)$ . Ainsi l'image par  $T_E$  d'un point  $x \neq x_{\max}$  est son successeur dans l'ordre lexicographique inverse. De plus  $x$  et  $T_E(x)$  sont clairement cofinaux.

L'application  $T_E$  est clairement continue, elle est de plus inversible. On appelle la paire résultante  $(X_E, T_E)$  un système dynamique de Bratteli-Vershik.

**Propriété 5.6.** Soit  $(V, E, \leq)$  un diagramme proprement ordonné. Le système  $(X_E, T_E)$  est un système dynamique réversible et minimal. Quand  $X_E$  est infini, c'est un système de Cantor.

## 5.2 Représentation BV

On vient de voir comment on pouvait passer d'un diagramme de Bratteli à un système dynamique mais il est aussi possible de faire l'inverse : construire un diagramme de Bratteli en partant d'un système de Cantor minimal. Nous ne parlerons pas de cette construction mais nous allons donner le théorème qui le synthétise.

**Théorème 5.7.** *Herman, Putnam, Skau*

*Pour tout système de Cantor minimal et réversible  $(X, T)$ , il existe un dia-*

gramme de Bratteli proprement ordonné  $(V, E, \leq)$  tel que  $(X, T)$  est isomorphe à  $(X_E, T_E)$ .

Voilà maintenant un important théorème qui fait le lien entre diagramme et système du point de vue des groupes de dimension.

**Théorème 5.8.** *Soit  $(V, E, \leq)$  un diagramme de Bratteli proprement ordonné, le groupe  $K^0(X_E, T_E)$  est le groupe de dimension  $DG(V, E)$  du diagramme  $(V, E)$ .*

*Remarque 5.3.* Par la suite, on pourra noter  $K_0(V, E)$  au lieu de  $DG(V, E)$ .

### 5.3 Morphismes et systèmes $S$ -adic

Soient  $A, B$  deux alphabets finis et  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  un morphisme. On dit que  $\tau$  est non-effaceur si l'image de toute lettre n'est pas le mot vide. La matrice d'incidence de  $\tau$  est la matrice  $|B| \times |A|$  dont le coefficient à la position  $(b, a)$  est le nombre d'apparitions de  $b$  dans  $\tau(a)$ . Pour  $a \in A$ , la longueur du mot  $\tau(a) \in B^*$  est notée  $|\tau(a)|$ . Le morphisme  $\tau$  est positif si les coefficients de  $|B| \times |A|$  sont tous positifs et il est left proper (resp. right proper) s'il existe une lettre  $b \in B$  telle que pour tout  $a \in A$ ,  $\tau(a)$  commence avec  $b$  (resp. finit avec  $b$ ); il est proper s'il est à la fois left proper et right proper. On dit que  $\tau$  est un morphisme chapeau si pour tout  $a, b \in A$ , les lettres apparaissant dans  $\tau(a)$  et  $\tau(b)$  sont toutes distinctes. Par concaténation, un morphisme  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  peut être étendu à  $A^{\mathbb{N}}$  et  $A^{\mathbb{Z}}$ .

Pour un morphisme non-effaceur  $\tau : A^* \rightarrow B^*$ , on définit  $\|\tau\| = \max_{a \in A} \{|\tau(a)|\}$  et  $\langle \tau \rangle = \min_{a \in A} \{|\tau(a)|\}$ . Supposons que  $B = \{b_1, \dots, b_{|B|}\}$  et pour  $a \in A$ , on écrit  $\tau(a) = b_{i_1}^{l_1} b_{i_2}^{l_2} \dots b_{i_{k(a)}}^{l_{k(a)}}$ , avec  $i_1, \dots, i_{k(a)} \in \{1, \dots, |B|\}$  et où  $b_{i_{j+1}} \neq b_{i_j}$  pour tout  $j = 1, \dots, k(a) - 1$ . L'entier  $k(a)$  représente le nombre de fois que l'on a besoin de changer de lettre lorsqu'on écrit  $\tau(a)$  plus un. La complexité de répétition de  $\tau$  est définie par

$$\text{r-comp}(\tau) = \sum_{a \in A} k(a).$$

On remarque que si  $\tau$  est positif alors  $k(a) \geq |B|$  pour tout  $a \in A$  et  $\text{r-comp}(\tau) \geq |A||B|$ . Pour un morphisme  $\tau : A \rightarrow B$ , on note  $\tau(A^{\mathbb{Z}})$  le plus petit subshift contenant  $\tau((x_i)_{i \in \mathbb{Z}})$  pour tout  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$ .

**Théorème 5.9.** *Donoso, Durand, Petite, Maass*

*Soient  $\sigma_1 = C^* \rightarrow D^*$ ,  $\sigma_2 : B^* \rightarrow C^*$  et  $\sigma_3 : A^* \rightarrow B^*$  trois morphismes et*

supposons que  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  soient positifs. Alors nous avons

$$p_{\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3(A^{\mathbb{Z}})}(n) \leq \begin{cases} (|C| + (|B| + 1)\text{r-comp}(\sigma_2))n & \text{si } n \in I \\ (|B| + |C| + \text{r-comp}(\sigma_2) + (|A| + 1)\text{r-comp}(\sigma_3))n & \text{si } n \in J \end{cases}$$

où  $I = [||\sigma_1||, \langle \sigma_1 \circ \sigma_2 \rangle)$  et  $J = [\langle \sigma_1 \circ \sigma_2 \rangle, ||\sigma_1 \circ \sigma_2||)$ .

Une séquence directive  $\tau = (\tau_i)_{i \geq 0}$  est une suite de morphismes non-effaceurs  $\tau_i : A_{i+1}^* \rightarrow A_i^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . On note  $\tau_{[i,k]}$  la composition  $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \dots \circ \tau_{k-1}$ . On dit que  $\tau$  est grossissant partout si  $\langle \tau_{[0,i]} \rangle = \min_{a \in A_i} \{|\tau_{[0,i]}(a)|\}$  tend vers  $\infty$  quand  $i \rightarrow \infty$ . On dit que  $\tau$  est primitif si pour tout  $i \geq 0$ , il existe  $k \geq i$  tel que  $\tau_{[i,k]}$  a une matrice d'incidence positive.

Pour  $i \geq 0$ , le langage d'ordre  $i$   $L_\tau^{(i)}$  associé à  $\tau$  est défini par

$$L_\tau^{(i)} = \{w \in A_i^* : \exists k > i, \exists a \in A_k, w \prec \tau_{[i,k]}(a)\}.$$

Pour chaque  $i \geq 0$ , l'ensemble  $X_\tau^{(i)}$  est l'ensemble infini des mots  $x \in A_i^{\mathbb{Z}}$  dont les facteurs appartiennent à  $L_\tau^{(i)}$ . On pose  $X_\tau = X_\tau^{(0)}$ ,  $L_\tau = L_\tau^{(0)}$  et on appelle  $(X_\tau, S)$  le  $S$ -adic système généré par la séquence directive  $\tau$ , où  $S$  est la transformation shift. Pour tout  $l \geq 1$ , on note  $L_{\tau,l}^{(i)}$  le sous-ensemble des facteurs de longueur  $l$  de  $L_\tau^{(i)}$ . Quand la séquence directive est primitive,  $(X_\tau, S)$  est un subshift minimal.

En conséquence du théorème précédent, nous avons le résultat suivant.

**Propriété 5.10.** Soit  $(X_\tau, S)$  le système  $S$ -adic généré par la séquence directive  $\tau = (\tau_i : A_{i+1}^* \rightarrow A_i^*)_{i \geq 0}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq ||\tau_0||$ , soit  $i = i(n)$  tel que  $n \in [||\tau_{[0,i]}||, ||\tau_{[0,i+1]}||)$ . Alors

$$p_{X_\tau}(n) \leq \begin{cases} (|A_i| + (|A_{i+1}| + 1)\text{r-comp}(\tau_i))n & \text{si } n \in I_i \\ (|A_{i+1}| + |A_i| + \text{r-comp}(\tau_i) + (|A_{i+2}| + 1)\text{r-comp}(\tau_{i+1}))n & \text{si } n \in J_i \end{cases}$$

où  $I_i = [||\tau_{[0,i]}||, \langle \tau_{[0,i+1]} \rangle)$  et  $J_i = [\langle \tau_{[0,i+1]} \rangle, ||\tau_{[0,i+1]}||)$ .

*Démonstration.* Le résultat suit de l'application du théorème précédent avec les morphismes  $\sigma_3 = \tau_{i+1} : A_{i+2}^* \rightarrow A_{i+1}^*$ ,  $\sigma_2 = \tau_i : A_{i+1}^* \rightarrow A_i^*$  et  $\sigma_1 = \tau_{[0,i]} : A_i^* \rightarrow A_0^*$  et en rappelant que  $X_\tau \subseteq \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3(A_{i+2}^{\mathbb{Z}})$ .  $\square$

La notion suivante connecte les diagrammes de Bratteli ordonnés et les systèmes  $S$ -adic. Soit un diagramme ordonné  $(V, E, \geq)$ , prenons  $i \geq 1$  et considérons  $V_i, V_{i+1}$  comme des alphabets finis. Pour tout  $u \in V_{i+1}$ , considérons la liste ordonnée  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  des arêtes de  $E_{i+1}$  arrivant à  $u$ , et soit  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  la liste des étiquettes des sources de ces arêtes dans  $V_i$ . Cela définit un morphisme  $\tau_i : V_{i+1}^* \rightarrow V_i^*$ ,  $u \mapsto v_1 v_2 \dots v_k$ . Pour  $i = 0$ , on pose  $\tau_0 : V_1^* \rightarrow E_1^*$  désignant le



morphisme tel que  $\tau(v) = e_1(v)\dots e_l(v)$ , où  $e_1(v)\dots e_l(v)$  sont les arêtes connectant  $V_0$  avec  $v$  selon l'ordre du diagramme. Pour  $i \geq 0$  on dit que  $\tau_i$  est le morphisme lue sur  $(V, E, \geq)$  au niveau  $i$  et que la séquence directive  $\tau = (\tau_i)_{i \geq 0}$  est la séquence de morphismes lue sur  $(V, E, \geq)$ . Remarquons que le morphisme lue sur  $(V, E, \geq)$  au niveau 0 est un morphisme chapeau.

La notion précédente donne un  $S$ -adic système naturellement associé à un système de Bratteli-Vershik. Le résultat suivant indique dans quelles conditions ces deux systèmes sont conjugués.

**Propriété 5.11.** Soit  $(X_\tau, S)$  un subshift  $S$ -adic minimal défini par la séquence directive  $\tau = (\tau_i)_{i \geq 0}$  où  $\tau_0$  est un morphisme chapeau et  $\tau_i$  est proper pour tout  $i \geq 1$ . On suppose que tout morphisme  $\tau_i$  s'étend par concaténation à une application injective de  $X_\tau^{(i+1)}$  à  $X_\tau^{(i)}$ . Alors  $(X_\tau, S)$  est conjugué au système de Bratteli-Vershik  $(X_B, V_B)$  associé au diagramme de Bratteli  $(V, E, \geq)$ , où  $\tau$  est la séquence de morphismes lue sur  $(V, E, \geq)$ .

Dans le lemme suivant, on donne des conditions suffisantes pour qu'un diagramme de Bratteli simple ait un ordre tel que la séquence de morphismes lue sur le diagramme ordonné satisfasse l'hypothèse de la proposition précédente.

**Lemme 5.12.** Soit  $(V, E)$  un diagramme de Bratteli simple avec une suite de matrices incidentes  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $V_i$  est l'ensemble de sommets au niveau  $i$  et  $m_i = |V_i|$ . On suppose que pour tout  $i \geq 1$ ,  $A_i(j, 1) > m_{i+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq m_{i+1}$ . Alors il est possible de donner à  $(V, E)$  un ordre  $\geq$  tel que la séquence de morphismes  $\tau = (\tau_i)_{i \geq 0}$  lue sur  $(V, E, \geq)$  vérifie que pour tout  $i \geq 1$ ,  $\tau_i : V_{i+1}^* \rightarrow V_i^*$  est proper, injective et peut s'étendre par concaténation à une application injective de  $X_\tau^{i+1}$  à  $X_\tau^{(i)}$ .

*Démonstration.* Pour les arêtes de  $E_1$  on choisit n'importe quel ordre. Soit  $i \geq 1$ ,  $V_i = \{u_1, \dots, u_{m_i}\}$  et  $V_{i+1} = \{v_1, \dots, v_{m_{i+1}}\}$ . Les  $j$  premières arêtes ont pour source  $u_1$  (c'est possible puisque nous avons supposé que  $A_i(j, 1) > m_{i+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq m_{i+1}$ ). Les  $A_i(j, 2)$  prochaines arêtes ont pour source  $u_2$ . Les arêtes restantes sont ordonnées de gauche à droite.

L'ordre précédent donne le morphisme suivant  $\tau_i : V_{i+1}^* \rightarrow V_i^*$ ,

$$\tau_i(v_j) = u_1^{l_{1,j}} u_2^{l_{2,j}} u_1^{l'_{1,j}} u_3^{l_{3,j}} u_4^{l_{4,j}} \dots u_{m_i}^{l_{m_i,j}} \quad \forall 1 \leq j \leq m_{i+1},$$

où  $l_{1,j} = j$ ,  $l'_{j,1} = A_i(j, 1) - j$  et  $l_{j,k} = A_i(j, k)$  pour tout  $2 \leq k \leq m_i$ . Il est clair que  $\tau_i$  est proper. Puisque  $l_{1,j}$  est différent pour tout  $v_j \in V_{i+1}$ ,  $\tau_i$  est injective

sur  $V_{i+1}$ .

Montrons que  $\tau_i$  s'étend par concaténation à une application injective de  $X_\tau^{(i+1)}$  à  $X_\tau^{(i)}$ . Pour  $x \in X_\tau^{(i+1)}$ , on définit l'ensemble  $C_{\tau_i}(x)$  des points de coupe de  $\tau_i(x)$  comme l'ensemble suivant,

$$C_{\tau_i}(x) = \{|\tau_i(x_{[0,l]})| : l > 0\} \cup \{0\} \cup \{-|\tau_i(x_{[l,0]})| : l < 0\}.$$

On remarque que pour l'ordre que nous avons considéré, pour tout mot  $x \in X_\tau^{(i+1)}$ , les points de coupe de  $\tau_i(x)$  sont localisés exactement aux endroits où une lettre  $u_{m_i}$  est suivie par une lettre  $u_1$ .

Soient  $x, x' \in X_\tau^{(i+1)}$  deux mots infinis tels que  $\tau_i(x) = \tau_i(x')$ . On veut prouver que  $x = x'$ . Puisque  $\tau_i(x) = \tau_i(x')$ , chaque fois que l'on voit le mot  $u_{m_i}u_1$  dans  $\tau_i(x)$ , on le voit aussi dans  $\tau_i(x')$  et inversement, donc les points de coupe de  $x$  et de  $x'$  sont localisés aux mêmes endroits. Par conséquent  $\tau_i(x_l) = \tau_i(x'_l)$  pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $\tau_i$  est injective sur  $V_{i+1}$ , on conclut que  $x_l = x'_l$  pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , et donc  $x = x'$ .  $\square$

## 6 Recherche

### 6.1 Introduction

Le but de cette section est de présenter les notions à connaître pour pouvoir aborder la partie de mon stage plus axée sur la recherche. Il était question de comprendre un théorème et d'essayer d'enlever une hypothèse. Voici le théorème en question :

**Théorème 6.1.** *Cecchi Bernales, Donoso*

*Soit  $(G, G^+, u)$  un groupe de dimension simple avec unité et soit  $p_n$  une suite de nombres réels positifs telle que  $\lim n/p_n = 0$ . Supposons que  $G$  soit un groupe divisible. Alors il existe un système Toeplitz (minimal)  $(Y, S)$  tel que*

*(1)  $K^0(Y, S)$  et  $(G, G^+, u)$  sont isomorphes en tant que groupes ordonnés unitaires.*

*(2) La complexité de  $(Y, S)$  satisfait  $\lim p_Y(n)/p_n = 0$ .*

Mon travail consistait à essayer d'affaiblir l'hypothèse " $G$  est un groupe divisible" pour la remplacer par " $G$  est un groupe associé à un système Toeplitz".

Pour continuer, rappelons tout de même quelques définitions.

**Définition 6.2.** Un groupe abélien  $(G, +)$  est dit divisible si pour tout  $g \in G$  et tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $h \in G$  tel que  $kh = g$ .

On a précédemment introduit les diagrammes de Bratelli car ils nous donnent une manière plus simple d'étudier les systèmes. Nous nous demandons donc comment traduire le caractère Toeplitz en terme de diagramme. Voilà encore un grand avantage des Toeplitz qui peut justifier l'importance de leur étude.

**Définition 6.3.** Un système dynamique  $(X, T)$  est dit expansif s'il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x \neq y$ ,  $\sup_k d(T^k(x), T^k(y)) > c$ , où  $d$  est la métrique que donne la topologie de  $X$ .

**Propriété 6.4.** Soit  $(X, T)$  un système de Cantor minimal. Alors  $(X, T)$  est conjugué à un subshift minimal sur un alphabet fini si et seulement s'il est expansif.

**Définition 6.5.** On dit qu'un diagramme de Bratelli simple a l'equal path number property (ERS) si pour tout  $i \geq 1$ , pour tout  $u, v \in V_i$ ,  $|r^{-1}(u)| = |r^{-1}(v)|$ . Autrement dit le nombre d'arêtes arrivant à un sommet est une constante pour chaque niveau. D'un point de vue matriciel, cela signifie que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  la somme des lignes de  $A_i$  est constante.

*Remarque 6.1.* La propriété ERS est conservée par télescopage.

Et voici le théorème faisant le lien.

**Théorème 6.6.** *Gjerde, Johansen*

*La famille de systèmes Bratelli-Vershik expansifs associés à des diagrammes ayant ERS coïncide avec la famille des systèmes Toeplitz par conjugaison.*

Je tiens ici à réintroduire la notion de limite directe d'une manière qui nous servira par la suite.

Pour une suite de morphismes de groupes  $(h_i : G_i \rightarrow G_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ , la limite directe associée est définie par

$$\lim(G_i, h_i) = \{(g, i) \in G_i \times \mathbb{N}\} / \sim,$$

où  $(g, i) \sim (g', i')$  si et seulement s'il existe  $k \geq i, i'$  tel que  $h_k \circ \dots \circ h_i(g) = h_k \circ \dots \circ h_{i'}(g')$ . On note  $[g, i]$  la classe d'équivalence de l'élément  $(g, i)$ .

De manière intuitive, deux éléments  $x, y$  n'appartenant pas forcément aux mêmes  $G_i$  sont associés dans la limite directe si à partir d'un certain, en leur faisant parcourir les morphismes, ils tombent sur le même point.

## 6.2 Résultat

J'ai donc réfléchi sur cette question pour essayer d'enlever l'hypothèse du groupe divisible, mais je pense que ce problème est plus compliqué que prévu ou en tout cas, il faut changer une partie de la preuve de manière radicale. En effet, cette hypothèse sert à un moment clé de la preuve lorsqu'on prend un diagramme de Bratteli associé à notre groupe  $G$  et la divisibilité nous sert à équilibrer les arêtes du graphe pour lui donner la propriété ERS. Elle sert ensuite plus loin mais de manière moins forte pour faire baisser la complexité. Or, il semble essentiel lors de l'équilibrage des arêtes d'avoir un groupe divisible, car ne contrôlant pas le nombre d'arêtes du graphe, on ne sait pas par quels nombres on va devoir diviser.

Pour pouvoir quand même travailler après avoir vu ces difficultés, j'ai décidé de changer les hypothèses. On travaille avec  $G$  un groupe divisible, mais fondamentalement, c'est un groupe associé à un Toeplitz ; or les Toeplitz ont un certain diagramme de Bratteli associé avec la propriété de ERS. J'ai donc décidé de commencer directement avec le diagramme de Bratteli ayant la propriété ERS. Cela renforce les hypothèses de l'énoncé mais me permet de l'affaiblir la divisibilité car je n'ai plus besoin de faire cet équilibrage, mais juste de le conserver au cours de l'opération. Durant mes deux semaines de recherches j'ai tout d'abord essayé de remplacer l'hypothèse divisible par  $p$ -divisible et c'est ce que je vais démontrer dans cette partie.

**Lemme 6.7.** Soit  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices à coefficients entiers positifs de taille  $d_i \times d_{i+1}$ , soit  $G = \lim(\mathbb{Z}^{d_i}, A_i)$  et  $p$  un nombre premier. Si pour tout  $i \geq 1$  tous les coefficients de  $A_i$  sont divisibles par  $p$ , alors  $G$  est un groupe  $p$ -divisible.

*Démonstration.* On doit montrer que pour tout  $g \in G$ , il existe  $h \in G$  tel que  $ph = g$ . Soit  $g = [x, i] \in G$ .

Soit  $z = A_i x$ , alors  $[z, i+1] = [x, i]$  puisque les coefficients de  $A_i$  sont divisibles par  $p$  on définit  $y = \frac{1}{p} A_i x$  et  $h = [y, i+1]$ . Alors  $ph = p[y, i+1] = [py, i+1] = [z, i+1] = [x, i] = g$ .  $\square$

**Lemme 6.8.** Soit  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices à coefficients entiers positifs de taille  $d_i \times d_{i+1}$ , soit  $G = \lim(\mathbb{Z}^{d_i}, A_i)$  et  $H = \lim(\mathbb{Z}[1/p]^{d_i}, A_i)$ . Soit  $G^+$  et  $H^+$  les cônes positifs de  $G$  et  $H$ . Soit  $u = [1, 0]_G$  et  $v = [1, 0]_H$  les unités de  $(G, G^+)$  et  $(H, H^+)$  où  $[\cdot, \cdot]_G$  et  $[\cdot, \cdot]_H$  désignent les classes d'équivalence de  $G$  et  $H$  et où  $1 \in \mathbb{Z}^{d_0} \subset \mathbb{Z}[1/p]^{d_0}$  est le vecteur  $(1, 1, \dots, 1)$ . Si  $G$  est  $p$ -divisible, alors  $(G, G^+, u)$  et  $(H, H^+, v)$  sont isomorphes en tant que groupes

| ordonnés unitaires.

*Démonstration.* Soit  $\phi : G \rightarrow H$  l'application définie par  $[x, i]_G \rightarrow [x, i]_H$ . Cette application est bien définie et est un morphisme injectif. De plus, par définition,  $\phi([1, 0]_G) = [1, 0]_H$ . Soit  $[y, i]_H$ , prenons  $(y, i) \in \mathbb{Z}[1/p]^{d_i} \times \mathbb{N}$  un représentant. Puisque  $y \in \mathbb{Z}[1/p]^{d_i}$ , on peut l'écrire sous la forme

$$\left( \frac{w_1}{p^{k_1}}, \frac{w_2}{p^{k_2}}, \dots, \frac{w_{d_i}}{p^{k_{d_i}}} \right),$$

où  $w_1, \dots, w_{d_i} \in \mathbb{Z}$ ,  $k_1, \dots, k_{d_i} \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $k = \max\{k_1, \dots, k_{d_i}\}$ , alors on peut écrire  $y = \frac{1}{p^k}(w'_1, \dots, w'_{d_i})$ , pour des certains  $w'_1, \dots, w'_{d_i} \in \mathbb{Z}$ . Soit  $z = (w'_1, \dots, w'_{d_i}) \in \mathbb{Z}^{d_i}$ . Puisque  $G$  est  $p$ -divisible, il existe  $[x, j]_G$  tel que  $p^k[x, j]_G = [z, i]_G$ . Cela signifie qu'il existe  $s \geq j, i$  tel que  $p^k A_s \dots A_j x = A_s \dots A_i z$ , et puisque  $p^k y = z$ , on obtient que  $[x, j]_H = [y, i]_H$ . Ceci montre que  $\phi$  est surjective. Il est direct de montrer que  $\phi(G^+) = H^+$ .  $\square$

**Théorème 6.9.** *Soit  $(V, E)$  un diagramme de Bratelli simple ayant la propriété ERS,  $(G, G^+, u)$  son groupe de dimension unitaire associé et soit  $p_n$  une suite de nombres réels positifs telle que  $\lim n/p_n = 0$ . Supposons que  $G$  soit un groupe  $p$ -divisible. Alors il existe un système Toeplitz (minimal)  $(Y, S)$  tel que*

(1)  $K^0(Y, S)$  et  $(G, G^+, u)$  sont isomorphes en tant que groupes ordonnés unitaires.

(2) La complexité de  $(Y, S)$  satisfait  $\lim p_Y(n)/p_n = 0$ .

*Démonstration.* Puisque le diagramme est simple, on peut supposer que les matrices  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont à coefficients strictement positifs. De plus, comme  $G$  est  $p$ -divisible par le lemme 6.8  $G = \lim(\mathbb{Z}^{m_i}, A_i) = \lim(\mathbb{Z}[1/p]^{m_i}, A_i)$ .

Pour tout  $i \geq 1$ , on pose  $t_i$  un entier naturel tel que  $\forall t \geq t_i$ ,

$$\frac{m_{i+1}^3 t}{p^t} < \frac{1}{i+1}. \quad (1)$$

On définit la séquence de matrices  $(A'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante. On pose  $A'_0 = A_0$ ,  $j_0 = 0$  et  $j_1 = 0$ .

Soit  $j_i$  tel que

- $j_i > 1$ ,
- $p^{j_i} > t_i$ ,
- $p^{j_i} \min_{p,q} \{A_{i-1}(p, q)\} > m_i$ .

On définit  $A'_{i-1} = j_i A_{i-1}$ . On remarque que  $p^{j_i}$  est inversible sur  $\mathbb{Z}[1/p]$ , que pour tout  $i \geq 0$ , la matrice  $A'_i$  a la propriété ERS et que pour tout  $i \geq 1$ ,  $A'_i$  satisfait les propriétés suivantes,

- $A'_i$  est une matrice a coefficients positifs divisibles par  $p$ .
- Tous les coefficients de  $A'_i$  sont strictement plus grands que  $m_{i+1}$ .

On remarque aussi que la suite  $(j_i)_{i \geq 0}$  satisfait  $p^{j_i} > t_i$  pour tout  $i \geq 2$ . Puisque  $p^{j_i}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[1/p]$ , la limite  $\lim(\mathbb{Z}[1/p]^{m_i}, A_i)$  et  $\lim(\mathbb{Z}[1/p]^{m_i}, A'_i)$  sont isomorphes et de même isomorphes à  $\lim(\mathbb{Z}^{m_i}, A'_i)$  puisque tous les coefficients sont divisibles par  $p$  au regard du lemme 6.7.

Soit  $(V', E')$  le diagramme de Bratteli associé à  $\lim(\mathbb{Z}^{m_i}, A'_i)$ . Par construction  $(G, G^+, u) \cong DG(V', E')$ . On note que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $|V'_i| = |V_i| = m_i$ . Puisque pour  $i \geq 1$ , les coefficients de  $A'_i$  sont strictement plus grands que  $m_{i+1}$ , on peut considérer  $(V', E')$  avec l'ordre donné dans le lemme 5.12. Soit  $\leq$  l'ordre partiel considéré sur  $E'$ , et soit  $(Y, S)$  le  $S$ -adic subshift généré par la séquence directive de morphismes  $\tau = (\tau_i)_{i \geq 0}$  lue sur  $(V', E')$ . En combinant la proposition 5.11 et le lemme 5.12, on obtient que le système de Bratteli-Vershik associé à  $(V', E', \leq)$  est conjugué à  $(Y, S)$ . Puisque les matrices d'adjacence de  $(V', E')$  ont la propriété ERS, le théorème 6.6 nous donne que  $(Y, S)$  est un Toeplitz subshift. Nous allons maintenant estimer la complexité  $p_Y(n)$ .

On remarque que puisque les matrices  $A'_i$  ont la propriété ERS,

$$\|\tau_{[0,i]}\| = \langle \tau_{[0,i]} \rangle = p^{j_1 + \dots + j_i} \geq p^{j_i}.$$

De plus  $r\text{-comp}(\tau_i) = |V'_{i+1}|(|V'_i| + 1) = m_{i+1}(m_i + 1)$ , on peut donc supposer que  $r\text{-comp}(\tau_i) \leq |V'_{i+1}|^2 = m_{i+1}^2$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq \|\tau_0\|$ , on pose  $i = i(n)$  tel que  $n \in [|\tau_{[0,i]}|, |\tau_{[0,i+1]}|)$ . La proposition 5.10 nous donne

$$p_Y(n) \leq 3m_{i+1}^3 n.$$

Puisque  $n \geq \|\tau_{[0,i]}\| \geq p^{j_i}$  et  $p^{j_i} \geq t_i$ , par 1, on a

$$\frac{p_Y(n)}{p_n} \leq 3m_{i+1}^3 \frac{n}{p_n} \leq \frac{3}{i+1}.$$

De cela, on déduit que  $p_Y(n)/p_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ce qui implique que  $i(n) \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 6.3 Pour continuer

Dans cette section, je propose quelques pistes auxquelles j'ai pensé pour essayer de continuer mais je n'ai aucune certitude sur le fait qu'elles puissent aboutir ou non. Les résultats de cette section sont donnés sans preuve.

**Définition 6.10.** Par un groupe rationnel  $H$  on désigne un sous-groupe (additif) de  $\mathbb{Q}$  qui contient  $\mathbb{Z}$ . On dit que  $H$  est un groupe rationnel non-cyclique si  $H$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Clairement  $(H, H^+, 1)$  est un groupe de dimension simple avec unité, où  $H^+ = H \cap \mathbb{Q}^+$ .

Les groupes rationnels sont exactement les groupes dénombrables sans torsion de rang un. Soit  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots$  un nombre supernaturel, où  $p_1, p_2, p_3, \dots$  sont les nombres premiers 2, 3, 5, ... listés par ordre croissant, et  $0 \leq k_i \leq \infty$  pour tout  $i$ . Si  $m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots$  est un autre nombre supernaturel, on multiplie  $n$  et  $m$  comme  $nm = p_1^{k_1+l_1} p_2^{k_2+l_2} \dots$ , où  $k_i + l_i = \infty$  si  $k_i$  ou  $l_i$  sont égaux à  $\infty$ . On dit que  $m$  divise  $n$ , noté  $m|n$  si  $l_i \leq k_i$  pour tout  $i$ . Pour  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots$ , on pose

$$G(n) = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b|n \right\}.$$

$G(n)$  est un groupe rationnel et tous les groupes rationnels sont de cette forme. De plus,  $G(n)$  est isomorphe à  $G(m)$  si et seulement s'il existe  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $an = bm$ . En particulier, tous les groupes  $G(n)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , sont isomorphes à  $G(1) = \mathbb{Z}$ . Notons que  $G(n)$  est  $p$ -divisible pour un certain nombre premier  $p$  si et seulement si  $p$  occure avec un indice infini dans la factorisation de  $n$ .

**Définition 6.11.** Soit  $(G, G^+, u)$  un groupe de dimension simple avec une unité  $u$ . On définit le groupe rationnel de  $G$ , noté  $\mathbb{Q}(G, G^+, u)$  ou  $\mathbb{Q}(G, u)$  comme

$$\mathbb{Q}(G, u) = \{g \in G \mid ng = mu \text{ avec } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}.$$

**Propriété 6.12.** Soit  $\mathbb{Q}(G, u)$  comme défini précédemment. L'application  $\Gamma : \mathbb{Q}(G, u) \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par  $\Gamma(g) = \frac{m}{n}$  si  $ng = mu$ , est un morphisme injectif envoyant  $u$  sur  $1 \in \mathbb{Z}$ , où  $\mathbb{Q}(G, u)^+ = \mathbb{Q}(G, u) \cap G^+$ . Alors  $\mathbb{Q}(G, u)$  est isomorphe à un groupe rationnel en tant que groupe ordonné. De plus,  $G/\mathbb{Q}(G, u)$ , vu comme un groupe abstrait est sans torsion.

**Théorème 6.13.** *Høynes*

Soit  $0 \leq t < \infty$ . Les trois ensembles suivants de groupes de dimension simples unitaires sont égaux (par rapport à l'isomorphisme de groupes ordonnés unitaires) :

$$A_t = \{(K^0(X, T), K^0(X, T)^+, 1) \mid (X, T) \text{ subshift Toeplitz, } h(T) = t\}$$

$$B = \{(G, G^+) \mid G \text{ groupe de dimension simple avec } \mathbb{Q}(G, u) \text{ non-cyclique}\}$$

$$C = \{(K_0(V, E), K_0(V, E)^+, [1]) \mid (V, E) \text{ diagramme de Bratteli simple avec}\}$$

la propriété de ERS}.

**Définition 6.14.** Soit  $(V, E)$  un diagramme de Bratteli avec les matrices  $(M_n)$  et la propriété ERS. Soit  $r_n$  la constante de la somme d'une ligne de  $M_n$ . On associe le nombre supernaturel  $\prod_{n=1}^{\infty} r_n$  à  $(V, E)$ .

**Lemme 6.15.** Soit  $(V, E, \geq)$  un diagramme de Bratteli simple avec la propriété de ERS. Soit  $M_n$  la matrice associée entre les niveaux  $n - 1$  et  $n$  et  $r_n$  la constante de la somme d'une ligne de  $M_n$ . Soit  $m$  le nombre supernaturel associé  $\prod_{n=1}^{\infty} r_n$ . Soit  $H = \mathbb{Q}(K_0(V, E), [1])$  où  $[1]$  est l'unité canonique de  $K_0(V, E)$ . Alors  $H$  est isomorphe avec l'ordre à un groupe rationnel  $G(m)$  par une application envoyant  $[1]$  sur  $1 \in G(m)$ .

Mon idée survient à ce moment là. Intuitivement, j'ai l'impression qu'il y a de grandes chances que dans le nombre  $m$  il y ait un nombre premier  $p$  qui occure avec un indice infini (par exemple, s'il y a une infinité de  $r_n$  qui sont pairs). Sous ces hypothèses qui sont plus réduites, on peut donc montrer que le groupe rationnel est  $p$ -divisible. C'est un premier pas dans ce que nous cherchions. Au lieu de supposer le groupe de dimension lui-même  $p$ -divisible, on peut montrer, sous certaines conditions, que l'un de ses sous-groupe l'est. De plus, d'après le théorème précédent, il est non-cyclique donc plus grand strictement que  $\mathbb{Z}$ , ce qui en fait un sous-groupe assez grand. Mon idée était de reprendre la preuve en essayant de remplacer " $G$  est un groupe  $p$ -divisible" par "le groupe rationnel de  $G$  est  $p$ -divisible" mais je n'ai pas encore eu le temps de poursuivre ce questionnement.

## Références

- [DP22] Fabien Durand et Dominique Perrin, *Dimension Groups and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2022.
- [BD22] Paulina Cecchi Bernales et Sebastián Donoso, *Strong orbit equivalence and superlinear complexity* to appear in Israel Journal of Mathematics, CMM Universidad de Chile, 2022.
- [HØY19] Siri-Malén Høyenes, *Toeplitz flows and their ordered K-theory*, Norwegian University of Science and Technology, 2019.
- [FUR81] Harry Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, 1981.