Classification des groupes d'ordre 12.

Quelques prérequis.

- Il y a à isomorphisme près exactement deux groupes d'ordre 4 : le groupe cyclique $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et le groupe de Klein $V_4 \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. On notera $V_4 = \{1, a_1, a_2, a_3\}$ avec $a_1 a_2 = a_3$.
- Le groupe des automorphismes de V_4 noté $\mathrm{Aut}(V_4)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, le groupe des permutations de l'ensemble $\{a_1, a_2, a_3\}$ qui a trois éléments.
- Si G est un groupe et $N \lhd G$ alors on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \underset{p}{\longrightarrow} G/N \longrightarrow 1.$$

Une *section* est un morphisme $s : G/N \to G$ tel que $p \circ s = id_{G/N}$. L'existence d'une section est équivalente à l'existence d'un sous-groupe $H \subset G$ tel que

$$p|_H : H \xrightarrow{\sim} G/N$$

(prendre $H = s(G/N)$). Dans ce cas, il existe un produit semi-direct tel que

$$G \simeq N \rtimes H.$$

On dit alors que H relève G/N ou que G/N se relève en H.
- Si N est d'indice fini, les sous-groupes H qui relèvent G/N sont exactement ceux qui vérifient :

$$|H| = [G : N] \quad \text{et} \quad N \cap H = \{1\}.$$

Pour le voir, il suffit de noter que $\mathrm{Ker}\, p|_H = \{1\}$ et de conclure par égalité des cardinaux.

Ce qu'on va montrer.

Théorème. *Il existe à isomorphisme près exactement cinq groupes d'ordre 12 :*
- *les abéliens :* $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- *les non abéliens :* $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes V_4$, $V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Preuve. Soit G un groupe d'ordre $12 = 2^2 \times 3$. Le théorème de Sylow dit que le nombre de 3-Sylow que l'on note r vérifie

$$r|4 \quad \text{et} \quad r \equiv 1\ [3].$$

On en déduit que $r = 1$ ou 4 et on va distinguer ces deux cas.

Premier cas : $r = 1$.

On appelle N l'unique 3-Sylow de G. C'est un sous-groupe distingué isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et si H est un 2-Sylow (ça existe), alors

$$|H| = 4 = [G : N] \quad \text{et} \quad N \cap H = \{1\} \quad \text{car} \quad 4 \wedge 3 = 1.$$

On en déduit que n'importe quel 2-Sylow H relève G/N et comme il n'y a que deux groupes d'ordre 4 :

$$G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \quad \text{ou} \quad G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes V_4$$

selon la forme de H. Pour savoir si plusieurs produits semi-directs non isomorphes peuvent exister, on étudie les morphismes $H \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ selon la forme de H. Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et on notera donc :

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) = \{id, u\}.$$

- Il y a deux morphismes de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(H)$ définis par l'image de 1 :

$$\begin{aligned} 1 \mapsto id \quad &\text{et dans ce cas} \quad G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}. \\ 1 \mapsto u \quad &\text{et dans ce cas} \quad G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \end{aligned}$$

  et ce dernier produit semi-direct est le seul qui n'est pas direct.
- Il y a quatre morphismes $V_4 \to \{id, u\}$ définis par les images de a_1 et a_2. Le morphisme trivial donne naissance au groupe

$$G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times V_4 \simeq \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

  Les trois autres morphismes donnent naissance à potentiellement trois produits semi-directs non directs mais en fait il sont tous isomorphes. On a donc sans ambiguïté :

$$G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes V_4.$$

Deuxième cas : $r = 4$.

Le groupe G contient quatre 3-Sylow, il n'est pas abélien et comme les intersections entre deux 3-Sylow sont triviales, il y a exactement $4 \times (3-1) = 8$ éléments d'ordre 3. Il y a au moins un 2-Sylow qui est d'ordre 4 et qui intersecte donc les 3-Sylow de manière triviale. Ce 2-Sylow est donc unique, il est distingué dans G et on le note N.

Comme avant, si H est un 3-Sylow, on a $|H| = [G : N] = 3$ et $N \cap H = \{1\}$ donc les 3-Sylow sont autant de relèvements de G/N. On en déduit :

$$G \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \quad \text{ou} \quad G \simeq V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$$

selon la forme de N. Comme tout à l'heure, il s'agit de regarder les morphismes de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ selon la forme de N. Comme $\mathbf{Z}/3Z$ est cyclique d'ordre 3, on va regarder les éléments d'ordre 3 dans $\mathrm{Aut}(N)$.

- D'abord $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et comme il n'y a pas d'élément d'ordre 3 dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ le seul morphisme $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ est le morphisme trivial donc $G \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. C'est un groupe abélien, ce qui est exclu.
- D'après les remarques préliminaires, $\mathrm{Aut}(V_4) \simeq \mathfrak{S}_3$ et il y a deux éléments d'ordre 3 (les 3 cycles (123) et (132)). Comme précédemment, les produits semi-directs qui en découlent sont isomorphes et alors :

$$G \simeq V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}.$$

La conclusion.

On a donc exhibé les cinq groupes annoncés et il reste à voir qu'ils sont deux à deux non isomorphes. C'est facile pour les groupes abéliens et pour ceux non abéliens, il suffit d'appliquer le théorème de Sylow pour exhiber leur structure en remarquant que si $G = N \rtimes H$ alors N et H se plongent dans G. On obtient :

$V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	possède un unique 2-Sylow(V_4) et quatre 3-Sylow	$\simeq \mathbf{Z}/3Z$
$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes V_4$	possède un unique 3-Sylow($\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$) et trois 2-Sylow	$\simeq V_4$
$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	possède un unique 3-Sylow($\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$) et trois 2-Sylow	$\simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$

□

Après il peut être intelligent de remarquer qu'en fait :

$$\mathfrak{A}_4 \simeq V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_6 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes V_4.$$

Référence. M. Alessandri, *Thèmes de Géométrie. Groupes en situation géométrique.*

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
104 Groupes finis. Exemples et applications.