# Une réponse probabiliste partielle au problème des moments de Hamburger.

**Théorème.** *Soit* $(\alpha_k)_k$ *une suite de réels telle que la série entière* $\sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} r^k$ *ait un rayon de convergence strictement positif. Alors il existe au plus une mesure de probabilité* $\mu$ *sur* $\mathbf{R}$ *dont les moments sont les* $\alpha_k$ *:*

$$\forall k \in \mathbf{N}, \;\; \alpha_k = \int x^k d\mu(x).$$

Preuve. Supposons l'existence d'une telle mesure $\mu$ et notons $\varphi$ sa fonction caractéristique. La fonction caractéristique a au moins deux vertus : elle caractérise la loi et les moments sont donnés par ses dérivées en 0. La preuve repose sur ces deux idées : on va montrer que sous la condition énoncée, la fonction caractéristique de $\mu$ est analytique, ainsi le théorème de prolongement analytique montrera que deux mesures ayant les mêmes moments auront la même fonction caractéristique, celles-ci coïncidant autour de zéro.

*Étape 1. Précisons le développement de Taylor de* $\varphi$*.*

Pour $x \in \mathbf{R}$, $t, h \in \mathbf{R}$ la formule de Taylor avec reste intégral pour $s \mapsto e^{isx}$ entre 0 et $h$ donne :

$$e^{i(t+h)x} = e^{itx} \left( \sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!} + \int_0^h \frac{(h-s)^n}{n!} (ix)^n e^{isx} ds \right)$$

Ce qui en intégrant sur $x \in \mathbf{R}$ selon $\mu$ donne :

$$\varphi(t+h) - \sum_{m=0}^{n} \frac{h^m}{m!} \varphi^{(m)}(t) = \int_{\mathbf{R}} \int_0^h \frac{(h-s)^n}{n!} (ix)^n e^{isx} ds \, d\mu(x)$$

En prenant les modules de chaque côté, on trouve finalement :

$$\left| \varphi(t+h) - \sum_{m=0}^{n} \frac{h^m}{m!} \varphi^{(m)}(t) \right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \beta_{n+1} \tag{1}$$

où on a noté :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \;\; \beta_k = \int |x|^k d\mu(x).$$

*Étape 2. Quid des* $\beta_k$ *?*

La majoration (**??**) montre que $\varphi$ est analytique en $t \in \mathbf{R}$ pour peu que l'on trouve $r > 0$ tel que

$$\forall |h| < r, \;\; \frac{|h|^n}{n!} \beta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Bien sûr, on va utiliser l'existence de $0 < s < 1$ tel que $\alpha_n s^n / n! \to 0$. On remarque d'abord que $\beta_{2n} = \alpha_{2n}$ de sorte que seul les termes avec un indice impair sont à contrôler. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\beta_{2n+1} \leq \sqrt{\alpha_{2n} \alpha_{2n+2}} \leq \frac{1}{2} \left( \alpha_{2n} + \alpha_{2n+2} \right).$$

Ainsi il suffit de prendre $r > 0$ tel que $(2n+2)r^{2n+1} < s^{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ pour avoir :

$$\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\beta_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Étape 3. Un prolongement analytique et c'est fini.*

Supposons que $\nu$ soit une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ admettant les $\alpha_k$ pour moments. Alors, on vient de montrer que les fonctions caractéristiques de $\mu$ et de $\nu$ coïncident sur l'ouvert $B(0,r)$ donc partout puisqu'elle sont analytiques [1]. Finalement, $\mu = \nu$.

Remarquons pour terminer qu'on a utilisé que les moments d'ordre pair.

□

**Les moments caractérisent parfois la loi.**

- La loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est caractérisée par ses moments :

  $$\alpha_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

  et

  $$\frac{\alpha_{2k}^{1/2k}}{2k} \sim \frac{C}{2k} \times \frac{k}{\sqrt{k}} \sim \frac{C}{\sqrt{k}}.$$

- La loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments. Elle est définie par la densité :

  $$f_0(x) = (2\pi)^{-1/2}x^{-1}\exp(-(\log x)^2/2), \quad x \geq 0.$$

  Et pour $-1 \leq a \leq 1$, la densité :

  $$f_a(x) = f_0(x)\big(1 + a\sin(2\pi\log x)\big)$$

  a les mêmes moments que $f_0$. Pour le voir, on va montrer que

  $$\forall r \in \mathbf{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^r f_0(x)\sin(2\pi\log x)dx = 0.$$

  Il suffit d'écrire le changement de variable $x = \exp(s+r)$ :

  $$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(rs + r^2)\exp(-(s+r)^2/2)\sin(2\pi(s+r))ds$$
  $$= (2\pi)^{-1/2}\exp(r^2/2)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-s^2/2)\sin(2\pi s)ds = 0$$

  par imparité de la dernière intégrande.

- En fait, les mesures caractérisées par leurs moments sont celles qui décroissent vite à l'infini (voir « tension de mesures »et théorème de Prokhorov dans l'annexe). On peut déjà voir que si le support de la mesure est contenu dans dans un segment $[-M, M]$, en approchant $F$ uniformément par des polynômes, le résultat est vrai. ( ?)

1. C'est hyper simple de l'écrire ici parce que le $r > 0$ ne dépend pas du $t$ : on peut arguer que $\mathbf{R}$ est archimédien...

**La méthode des moments.**

Pour montrer qu'une suite de variables aléatoires à valeurs réelles convergent en loi on peut utiliser le critère suivant quand on sait que la limite est caractérisée par ses moments :

**Théorème** (Méthode des moments). *Soit $X$ une variable aléatoire réelle caractérisée par ses moments et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telles que*

$$\forall r \in \mathbf{N}, \ \ \mathbf{E}(X_n^r) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(X^r).$$

*Alors $X_n \Rightarrow X$.*

Preuve. On note classiquement $\mu_n$ la loi de $X_n$ et $\mu$ la loi de $X$. Alors comme la suite $\big(\mathbf{E}(X_n^2)\big)_n$ converge, elle est majorée, disons par $K > 0$ et l'inégalité de Markov montre que :

$$\mathbf{P}(|X_n| \geq x) \leq \frac{K}{x^2}$$

de sorte que la suite $(\mu_n)_n$ est tendue. Pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de montrer qu'elle a une unique valeur d'adhérence. Supposons donc que $\mu_{n_k} \Rightarrow \nu$ et considérons $Y$ une variable aléatoire réelle de loi $\nu$. Il s'agit d'un problème d'uniforme intégrabilité : pour tout $r > 0$ on a comme tout à l'heure pour un certain $K > 0$ :

$$K \geq \int X_n^{2r} d\mathbf{P} \geq \alpha \int_{|X_n|^r \geq \alpha} |X_n|^r d\mathbf{P}$$

de sorte que la suite $(X_n^r)_n$ est uniformément intégrable et comme elle converge en loi vers $Y^r$ (facile à voir avec la caractérisation par l'intégrale sur une fonction continue bornée) le théorème de Vitali (mais s'appelle-t-il bien Vitali ?) montre que

$$\mathbf{E}(X_n^r) \to \mathbf{E}(Y^r).$$

Ainsi $X$ et $Y$ ont les mêmes moments et ont donc la même loi : $\nu = \mu$ $\square$

**Quelques remarques complémentaires.**

- La condition que l'on donne n'est pas vraiment optimale. Une condition légèrement plus forte est connue sous le nom de condition de Carleman (peut être qu'on peut raffiner la preuve pour la retrouver) :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{2k}^{1/2k}} = +\infty.$$
Cela étant, on peut montrer que cette condition est suffisante mais pas nécéssaire. Il existe aussi des conditions nécessaires mais pas suffisantes.
- En fait, le problème des moments n'est pas inhérent aux probabilités. Dans le cas général (pour une mesure de Borel), une condition nécéssaire et suffisante est donnée par l'analyse fonctionnelle (voir [Lax, *Functional Analysis*]) :
$$\sum_{n,k} \alpha_{n+k}\xi_n\xi_k \geq 0$$
pour toute famille finie de de réels $(\xi_n)_{0\leq n\leq N}$. Il semblerait que des applications existent en physique quantique.
- Il existe d'autres problèmes de moments et en particulier le problème de Stieltjes lorsqu'on se restreint à des mesures dont le support est contenu dans $[0, +\infty)$. Il y a des liens entre les différents problèmes.
- P. Billingsley donne de jolies applications de la méthode des moments, pour prouver le théorème central limite ou en théorie des nombres notamment.
- Quand la mesure $\mu$ est à densité, il y a plus simple pour vérifier l'analyticité de $\varphi$ : c'est le théorème de Paley et Wiener (coucou cher jury).

**Annexe : Sur la converge en loi.**

**Théorème** (Skorohod)**.** *Si $F_n$ converge en loi vers $F$, alors il existe des variables aléatoires $Y, Y_n$ associées aux fonctions de répartition respectives $F$ et $F_n$ telles que $Y_n \to Y$ presque sûrement.*

Preuve. On considère $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F}$ les boréliens de $\Omega$ et $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue sur $\Omega$. On définit :

$$Y_n(x) = \sup\{y, F_n(y) < x\} \quad \text{et} \quad Y(x) = \sup\{y,\ F(y) < x\}.$$

Ces variables aléatoires $Y, Y_n$ admettent $F$ et $F_n$ pour fonctions de répartition respectives (c'est presque une tautologie mais il faudrait y réfléchir). Pour conclure, on se convainc que :

$$\liminf_{n\to+\infty} Y_n(x) \geq Y(x) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} Y_n(x) \leq Y(x).$$

□

**Théorème** (Helly)**.** *De toute suite de fonctions de répartition $(F_n)_n$, on peut extraire une sous-suite qui converge simplement vers une fonction $F$, continue à droite et croissante, en tout point de continuité de $F$. La limite $F$ n'est pas nécessairement une fonction de répartition.*

Preuve. L'argument principal est la séparabilité de $\mathbf{R}$ couplé à une extraction diagonale. Plus précisément, puisque $\mathbf{Q}$ est dénombrable, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et un argument d'extraction diagonale, il existe une extractrice $n(k)$ telle que :

$$\forall q \in \mathbf{Q},\ \ F_{n(k)}(q) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} G(q)$$

où $G$ est une fonction définie a priori sur $\mathbf{Q}$. On pose :

$$F(x) := \inf\{G(q),\ q \in \mathbf{Q},\ q > x\}.$$

La fonction $F$ ainsi définie et continue à droite et croissante. Pour terminer, soit $x$ un point de continuité de $F$, on considère des rationnels $r_1 < r_2 < s$ tels que

$$F(x) - \varepsilon < F(r_1) \leq F(r_2) \leq F(x) \leq F(s) < F(x) + \varepsilon.$$

Pour $k$ assez grand, on vérifie alors :

$$F(x) - \varepsilon < F_{n(k)}(r_2) \leq F_{n(k)}(x) \leq F_{n(k)}(s) < F(x) + \varepsilon.$$

□

**Théorème** (Prokhorov)**.** *Si les mesures $\mu_n$ associées aux $F_n$ vérifient la condition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon > 0,\ \limsup_{n\to+\infty} \big(1 - \mu_n([-M_\varepsilon, M_\varepsilon])\big) \leq \varepsilon \tag{2}$$

*alors toute limite simple en tout point de continuité d'une sous-suite de $(F_n)_n$ est une fonction de répartition. Remarquons aussi que :*

$$\mu_n([-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) = F_n(M_\varepsilon) - F(-M_\varepsilon).$$

*Cela montre que de toute suite de mesure tendue on peut extraire une sous-suite convergente (pour la convergence en loi).*

Preuve. Supposons (**??**) et considérons une sous-suite $(F_{n(k)})_k$ qui converge simplement vers une fonction $F$ continue à droite et croissante en tout point de continuité de $F$. Pour que $F$ soit une fonction de répartition, il suffit de montrer que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Il suffit de voir que pour $r < -M_\varepsilon$ et $s > M_\varepsilon$ des points de continuité de $F$ :

$$\begin{aligned} 1 - F(s) + F(r) &= \lim_{k\to+\infty} 1 - F_{n(k)}(s) + F_{n(k)}(r) \\ &\leq \limsup_{k\to+\infty} 1 - F_n(M_\varepsilon) + F(M_\varepsilon) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

et donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\limsup_{x\to+\infty} 1 - F(x) + F(-x) \leq \varepsilon$. □

**Corollaire.** *Soit $(\mu_n)_n$ une suite tendue de mesures de probabilité sur* $\mathbf{R}$ *qui admet une unique valeur d'adhérence. Alors la suite converge vers cette valeur d'adhérence.*

**Théorème** (Vitali)**.** *Si $X_n \Rightarrow X$ et si les $(X_n)_n$ sont uniformément intégrables au sens où*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_n \int_{|X_n|\geq\alpha} |X_n| d\mathbf{P} = 0$$

*alors*

$$\mathbf{E}(X_n) \to \mathbf{E}(X).$$

Preuve. Par le théorème de Skorohod, on peut considérer $\tilde{X}_n \to \tilde{X}$ presque sûrement et il suffit de considérer

$$\tilde{X}_n^{(\alpha)} = \tilde{X}_n \mathbf{1}_{|\tilde{X}_n|\leq\alpha} \text{ et } \tilde{X}^{(\alpha)} = \tilde{X}\mathbf{1}_{|\tilde{X}|\leq\alpha}$$

pour conclure en utilisant notamment le théorème de convergence dominée [2]. □

**Références.**


P. Billingsley, *Probability and Measure*
R. Durrett, *Probability : Theory and Examples*
B. Candelpergher, *Théorie des probabilités, un introduction élémentaire*


**241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
**260** Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
**263** Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

2. le théorème de Vitali en est une généralisation, il dit en fait un peu plus que ça