Le théorème ergodique de Von Neumann.

Théorème (Von Neumann)**.** *Soient H un espace de Hilbert. Soit $U(t)$, $t \in \mathbf{R}$, un semi-groupe fortement continu d'opérateurs unitaires*[1] *de H.*

(i) Le sous-espace $F := \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{Ker}(U(t) - I)$ est un sous-espace fermé de H et on note P la projection orthogonale sur ce sous-espace.

(ii) Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur « moyenne temporelle » :

$$M(t)g := \frac{1}{t} \int_0^t U(s)g\,ds.$$

C'est un opérateur[2] *continu de norme ≤ 1.*

Lorsque $t \to +\infty$, on a :

$$\forall g \in H, \ \lim_{t \to +\infty} M(t)g = Pg.$$

Preuve (Hopf). D'abord, $\mathrm{Ker}(U(t) - I)$ est fermé pour tout $t \geq 0$ car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ qui est fermé par une application continue, donc F est fermé. De plus, il est facile de voir que si U est unitaire, alors :

$$\mathrm{Ker}(U - I) = \mathrm{Im}(U - I)^{\perp}.$$

En effet,

$$\forall g, h \in H, \ \langle (U - I)g, h \rangle = \langle g, (I - U)U^* h \rangle.$$

À partir de maintenant, on considère $r \geq 0$ et l'opérateur $U := U(r)$. D'après ce qui précède,

$$H = \mathrm{Ker}(U - I) \oplus_{\perp} \overline{\mathrm{Im}(U - I)}.$$

Si $g \in H$, on note alors $g = e + z$ selon la décomposition précédente.

(1) On montre que $M(t)z \to 0$. Pour cela, on approche z à ε près par :

$$\|z - z_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad z_\varepsilon \in \mathrm{Im}(U - I).$$

On a $\|M(t)z - M(t)z_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ et pour un certain $h \in H$:

$$\begin{aligned}
M(t)z_\varepsilon &= M(t)(U - I)h = M(t)U(r)h - M(t)h \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t U(s + r)h\,ds - \frac{1}{t} \int_0^t U(s)h\,ds \\
&= \frac{1}{t} \int_r^{t+r} U(s)h\,ds - \frac{1}{t} \int_0^t U(s)h\,ds \\
&= \frac{1}{t} \int_t^{t+r} U(s)h\,ds - \frac{1}{t} \int_0^r U(s)h\,ds
\end{aligned}$$

et chacun des deux termes est de norme inférieure à $r\|h\|/t \to 0$.

1. C'est à dire : $U(0) = Id$, $U(t + s) = U(t)U(s)$, $U(t)x \underset{t \to 0}{\longrightarrow} x$ et $U(t)U(t)^* = Id$

2. Pas d'inquiétude, on peut définir l'intégrale de Riemann d'une fonction continue d'un intervalle de $\mathbf{R}$ à valeurs dans un Banach : c'est la limite des sommes de Riemann dont ont peut montrer la cauchyssitude. Bien sûr, toutes les propriétés de l'intégrale sont valables.

(2) On montre que $M(t)e$ converge vers un élément de $\mathrm{Ker}(U-I)$. D'abord, on remarque que $U(t+r)e = U(t)U(r)e = U(t)e$ donc par r-périodicité en écrivant $t = nr + q$:

$$M(t)e = \frac{1}{t}\int_0^t U(s)e\,ds = \frac{n}{t}\int_0^r U(s)e\,ds + \frac{1}{t}\int_0^q U(s)e\,ds.$$

Lorsque $t \to +\infty$, on obtient :

$$M(t)e \to \frac{1}{r}\int_0^r U(s)e\,ds \in \mathrm{Ker}(U(r)-I).$$

Puisque $r \geq 0$ était choisi arbitrairement, on en déduit que pour tout $g \in H$, la limite de $M(t)g$ existe et appartient à F. Montrons pour conclure que cette limite est bien la projection annoncée. D'abord, on voit que pour tout $g \in F$, et tout $t \geq 0$, $U(t)g = g$ *i.e* $U(t)^*g = g$. Cela implique que $F^\perp$ est stable par tous les $U(s)$ car

$$\forall w \in F^\perp,\ \forall f \in F,\ \ \langle U(s)w, f\rangle = \langle w, U(s)^* f\rangle = \langle w, f\rangle = 0.$$

Du coup, pour tout $t \geq 0$, $M(t)$ stabilise aussi $F^\perp$. Mais alors :

$$\forall g \in F^\perp,\ \ \lim_{t\to+\infty} M(t)g \in F^\perp \cap F = \{0\}$$

et

$$\forall g \in F,\ \ [\forall t \geq 0,\ \ M(t)g = g]\ \Rightarrow\ \lim_{t\to+\infty} M(t)g = g.$$

Ce qui conclut. □

De la mécanique statistique.

On considère $H = L^2(\mu)$ où μ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^{6N}$. On considère le système différentiel :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = F(Z(t))$$

qui est de divergence nulle donc le flot préserve la mesure au sens où pour tout $\Omega \subset \mathbf{R}^{6N}$ et tout $t \geq 0$:

$$\mu(X(t,0,\Omega)) = \mu(\Omega).$$

De plus, puisque le système est homogène, le flot définit un semi-groupe fortement continu :

$$U(t)g(z) := g(X(t,0,z)).$$

Puisque le flot préserve la mesure, les opérateurs $U(t)$ sont unitaires. On peut alors montrer (regarder $f^{-1}(]\infty, c[)$ pour $f \in F$ et $c \in \mathbf{R}$) que le sous-espace F est réduit aux constantes si et seulement s'il n'existe pas de sous-ensemble (mesurable) non trivial invariant par le flot (on dit alors que la transformation est **ERGODIQUE**). Dans ce cas, le théorème ergodique stipule que

$$\forall g \in H,\ \ \frac{1}{t}\int_0^t g(X(s,0,\cdot))ds \ \stackrel{L^2(\mu)}{\longrightarrow}\ Pg = \int_{\mathbf{R}^{6N}} g(z)d\mu(z).$$

Au fondement de la mécanique statistique se tient *l'hypothèse ergodique* qui affirme l'égalité entre les moyennes spatiales et temporelles. Au vu des échelles de temps dans la réalité véritable lorsque $N \sim 10^{23}$, ça ne parait pas délirant.

Enfin, il existe une version discrète de ce théorème sont la preuve est en tout point semblable, on la trouvera au choix dans [Gonnord, Tosel, *Analyse Fonctionnelle*], [Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*] ou [Petersen, *Ergodic Theory*].

Référence. P. D. Lax, *Functional Analysis*

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaire continues. Exemples.
213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.