

LECTURE DIRIGÉE
ENS RENNES - L3 MATHÉMATIQUES

Itération de polynômes et ensembles de Julia

Magali JAY, Clémentine LAURENS

encadrée par
Franck LORAY

Janvier-Avril 2018

Résumé

Ce document s'intéresse à des questions de dynamique complexe : il classe les points de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en fonction de leur comportement sous l'action d'itérées de transformations holomorphes. Plus précisément, étant donnée une transformation holomorphe R , cette étude sépare la sphère de Riemann en deux ensembles disjoints : l'ensemble de Fatou $F(R)$, qui correspond à l'ensemble des points "stables" (en un sens que l'on définira) sous l'action des itérées de R , et l'ensemble de Julia $J(R)$, défini comme le complémentaire de l'ensemble de Fatou, sur lequel la dynamique de R est plus difficile à appréhender. C'est sur ce dernier ensemble que nous nous concentrerons : nous montrerons un certain nombre de ses propriétés, parmi lesquelles le théorème fondamental affirmant que "l'ensemble de Julia $J(R)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs pour R ". Enfin, à l'aide de ces diverses caractéristiques, nous tâcherons d'expliquer le caractère "fractal" que présentent les ensembles de Julia.

Table des matières

1	Cadre de l'étude, définitions et notations générales	2
2	Les ensembles de Julia et Fatou : définitions et premières propriétés	4
3	Étude locale : dynamique au voisinage des points périodiques	7
4	Propriétés générales des ensembles de Julia	11
4.1	Les ensembles de Julia sont compacts	11
4.2	Les ensembles de Julia sont généralement d'intérieur vide	12
4.3	Les ensembles de Julia sont des ensembles parfaits	12
4.4	L'ensemble de Julia $J(R)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs pour R	13
5	Discussion autour du caractère fractal des ensembles de Julia	15

1 Cadre de l'étude, définitions et notations générales

Dans tout ce qui suit, on considère R un **polynôme de degré ≥ 2** :

$$R : \begin{cases} \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \sum_{i=0}^d a_i z^i \end{cases} \quad \text{avec } d \geq 2 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, a_i \in \mathbb{C}$$

Remarque 1.1. Le lecteur pourra garder à l'esprit que la majorité des résultats présentés dans ce document reste valable pour R une transformation holomorphe quelconque. Toutefois, par souci de concision et de clarté, les démonstrations ne seront faites que pour R une transformation polynomiale. Certaines démonstrations restent inchangées dans le cas d'une transformation holomorphe quelconque, mais d'autres nécessitent d'être aménagées, en utilisant le fait que les transformations holomorphes de $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ sont exactement les fractions rationnelles de $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ à coefficients dans \mathbb{C} . Nous ne nous attarderons pas sur ce point.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par R^n la n -ième itérée de R : $R^n = \overbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}^{n \text{ fois}}$.

ATTENTION à ne pas confondre cette notation avec une puissance n -ième : pour z dans $\overline{\mathbb{C}}$, on a généralement $R^n(z) = (R \circ \dots \circ R)(z) \neq (R(z))^n$.

Définition 1.1 (Orbite). Soit z_0 un point de $\overline{\mathbb{C}}$. On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = R(z_n) = R^{n+1}(z_0)$$

On appelle cette suite l'orbite de z_0 sous l'action de R , et on la note $O^+(z_0)$.

Définition 1.2 (Périodicité). Soit z_0 un point de $\overline{\mathbb{C}}$. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_n = z_0$, on dit que z_0 est un point périodique sous l'action de R et que $O^+(z_0)$ est une orbite périodique. On appelle alors période de z_0 l'entier $m = \min \{n \in \mathbb{N}^* | z_n = z_0\}$. De plus, un point périodique de période 1 sera appelé point fixe.

Définition 1.3 (Pré-périodicité). Soit z_0 un point de $\overline{\mathbb{C}}$. On dit que z_0 est pré-périodique s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que z_k soit périodique. On dit que z_0 est strictement pré-périodique s'il est pré-périodique mais non périodique.

On appelle dynamique de R l'étude des suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout z_0 dans $\overline{\mathbb{C}}$. On cherche donc à caractériser le comportement des points de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ sous l'action des itérées de la transformation R . Pour cela, il peut être intéressant de savoir comment se ramener à l'étude d'une transformation S "plus simple" que R . C'est ce que permet le principe de conjugaison, que nous expliquons ci-dessous.

Définition 1.4 (Homéomorphisme). Un homéomorphisme est une application bijective, continue et de réciproque continue entre deux espaces topologiques.

Deux espaces homéomorphes sont donc topologiquement "les mêmes".

Définition 1.5 (Transformation de Möbius). Une transformation de Möbius de $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$ de la forme :

$$M : \begin{array}{l|l} \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} & \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ \frac{-d}{c} & \longmapsto \infty \\ \infty & \longmapsto \frac{a}{c} \end{array}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Pour visualiser, on pourra garder à l'esprit qu'une transformation de Möbius est "localement holomorphe", et donc "localement conforme".

Remarque 1.2. L'inverse d'une transformation de Möbius est encore une transformation de Möbius.

Remarque 1.3. Certains ouvrages préfèrent parler d' "homographies" pour ce type d'applications, et réserver le terme de "transformation de Möbius" pour des objets un peu plus généraux. Ce n'est pas le choix que nous avons fait dans ce document.

Définition 1.6 (Conjugaison). Deux transformation holomorphes R et S de $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ sont dites (analytiquement) conjuguées s'il existe une transformation de Möbius M telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{S} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Deux transformations holomorphes conjuguées ont donc "la même" dynamique : à transformation de Möbius près, elles agissent de la même façon sur tout sous-ensemble de $\overline{\mathbb{C}}$. On formalisera ceci dans la section 2.

Enfin, la notion de famille normale, que nous abordons ci-dessous, va nous permettre de définir la notion de "stabilité" qui nous intéressera dans la suite de cette étude.

Définition 1.7 (Fonction méromorphe). Une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\overline{\mathbb{C}}$ est une fonction holomorphe sur U tout entier, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés, qui sont chacun un pôle de la fonction.

Définition 1.8 (Famille normale). Soient U un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ une famille de fonctions méromorphes de $U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (avec I un ensemble d'indices quelconque). On dit que \mathcal{F} est une famille normale si de toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathcal{F} , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U .

Remarque 1.4. La limite de cette sous-suite convergente ne doit pas nécessairement faire partie de \mathcal{F} .

Définition 1.9 (Famille équicontinue). Soient (X, d) un espace métrique et $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ une famille de fonctions de $X \rightarrow X$ (avec I un ensemble d'indices quelconque). On dit que \mathcal{F} est une famille équicontinue si quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow (\forall i \in I, d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \epsilon)$$

Le théorème d'Arzela, énoncé ci-dessous, permet d'établir un lien très fort entre ces deux dernières notions.

THÉORÈME 1.1 (Arzela). Soient U un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ une famille de fonctions méromorphes de $U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (avec I un ensemble d'indices quelconque). Alors \mathcal{F} est normale si et seulement si elle est équicontinue sur tout compact de U .

Démonstration. Dans ce qui suit, on conserve les notations de l'énoncé.

Ce théorème est une conséquence quasi- immédiate de l'équivalence suivante, donc on pourra consulter une preuve détaillée dans [Sch97], page 346.

Soit C un compact de U , alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'ensemble $\mathcal{F}|_C := \{f|_C \mid f \in \mathcal{F}\}$ est borné (au sens de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$).
- (ii) \mathcal{F} est équicontinue sur C , et pour tout $z \in C$, l'ensemble $\mathcal{F}(z) := \{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est borné.

□

Ce qu'affirme notamment le théorème d'Arzela, c'est que quitte à se restreindre à un ensemble de départ suffisamment "petit" (un compact), appliquer à cet espace des fonctions d'une famille normale ne le fera pas "exploser" : si deux points du compact sont suffisamment proches l'un de l'autre (δ -proches), alors leur appliquer l'une quelconque des fonctions de la famille normale ne les éloignera pas trop l'un de l'autre (ils resteront ϵ -proches). C'est en fait cette forme de "stabilité" qui va nous intéresser : c'est ce que formalisent les définitions de la partie suivante.

2 Les ensembles de Julia et Fatou : définitions et premières propriétés

Définition 2.10 (Ensemble de Fatou). Un point $z \in \overline{\mathbb{C}}$ est un élément de l'ensemble de Fatou de R , noté $F(R)$, s'il existe un voisinage ouvert U de z tel que la famille $\mathcal{F} = \{R^n|_U \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ des itérées de R restreintes à U soit une famille normale.

L'ensemble de Fatou est donc l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{C}}$ "stables", au sens défini ci-dessus, sous l'action des itérées de R .

Définition 2.11 (Ensemble de Julia). L'ensemble de Fatou de R , noté $J(R)$, est le complémentaire de l'ensemble de Fatou.

Il découle immédiatement des définitions que :

Propriété 2.1.

- (i) L'ensemble de Fatou est ouvert.
- (ii) L'ensemble de Fatou $F(R)$ est complètement invariant :

$$\forall z \in F(R), R(z) \in F(R) \text{ et } R^{-1}(\{z\}) \subset F(R)$$

Puis, par passage au complémentaire, on obtient :

Propriété 2.2.

- (i) L'ensemble de Julia est fermé.
- (ii) L'ensemble de Julia $J(R)$ est complètement invariant.

EXEMPLE 2.1. Considérons le polynôme $R : z \mapsto z^2$. Etudions la dynamique de R sur différentes parties de \mathbb{C} , en remarquant que $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, R^n(z) = z^{2^n}$.

- Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tel que $|z_0| < 1$. Posons $r_0 = \frac{1-|z_0|}{3}$ et $U = D(z_0, r_0)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r_0 . Alors U est un voisinage ouvert de z_0 et la suite de fonctions $(R^n|_U)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément¹ sur U vers la fonction $S_0 : z \in U \mapsto 0$. Donc la famille $\{R^n|_U \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est normale. Donc $z_0 \in F(R)$.
- Soit $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$ tel que $|z_1| > 1$. Posons $r_1 = \frac{|z_1|-1}{3}$ et $V = D(z_1, r_1)$ le disque ouvert de centre z_1 et de rayon r_1 . Alors V est un voisinage ouvert de z_1 et la suite de fonctions $(R^n|_V)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément² sur V vers la fonction $S_1 : z \in V \mapsto \infty$. Donc la famille $\{R^n|_V \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est normale. Donc $z_1 \in F(R)$.
- Soit $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ tel que $|z_2| = 1$. On va montrer que $z_2 \in J(R)$ en montrant que la famille $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est normale sur aucun ouvert contenant z_2 . Pour ce faire, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe W un voisinage ouvert de z_2 tel que $\{R^n|_W \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ soit normale sur W , i.e. (cf. théorème d'Arzela) équicontinue sur tout compact de W . On peut supposer que W est un disque ouvert centré en $z_2 : W = D(z_2, r)$ avec $r > 0$. Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ comme dans la définition de l'équicontinuité pour les $\{R^n|_W \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $C = \overline{D}(z_2, \frac{\min(\delta, r)}{2})$ est un compact de W . Posons $x_1 = z_2 - \frac{\min(\delta, r)}{3} z_2$ et $x_2 = z_2 + \frac{\min(\delta, r)}{3} z_2$. Alors $(x_1, x_2) \in C^2$, $|x_1 - x_2| < \delta$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} R^n(x_1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R^n(x_2) = \infty$, donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|R^N(x_1) - R^N(x_2)| > \epsilon$ ce qui contredit l'équicontinuité sur C de la famille $\{R^n|_W \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Donc on a bien $z_2 \in J(R)$.

Ainsi, pour $R : z \mapsto z^2$, on a $J(R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| = 1\}$ (l'ensemble de Julia de ce polynôme est le disque unité).

Dans ce document, on s'intéresse à l'étude de l'ensemble de Julia $J(R)$ (pour R un polynôme quelconque de degré ≥ 2). Le théorème 2.2 ci-dessous permet de s'assurer que cette étude n'est pas vide de sens.

Lemme 2.1. *Toute limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales sur $\overline{\mathbb{C}}$ est une fonction polynômiale sur $\overline{\mathbb{C}}$.*

1. La convergence est bien uniforme : par construction, on a imposé $\sup_{z \in U} |z| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R^n|_U\|_\infty = 0$
2. Par construction, on a imposé $\inf_{z \in V} |z| > 1$ donc $\sup_{z \in V} |\frac{1}{z}| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\frac{1}{R^n}|_V\|_\infty = 0$ i.e. $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $z \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto \infty$.

Démonstration. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes sur $\overline{\mathbb{C}}$ convergeant uniformément vers une fonction $S : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|P_n - S\|_\infty \leq 1$. Soit un tel N . Alors, par inégalité triangulaire, $\forall n \geq N$, $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 2$. Donc $\forall n \geq N$, $(P_n - P_N)$ est un polynôme borné, donc constant : $\exists c_n \in \overline{\mathbb{C}}$ tel que $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, $P_n(z) - P_N(z) = c_n$ (*).

En particulier (pour $z = 0$), on a donc $P_n(0) - P_N(0) = c_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc que la suite $(c_n)_{n \geq N}$ converge vers $c_\infty := S(0) - P_N(0)$ (car la convergence uniforme des $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique leur convergence simple en 0).

En faisant à présent tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient donc que $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, $S(z) = P_N(z) + c_\infty$. Donc S est polynomiale. □

THÉORÈME 2.2. *L'ensemble de Julia $J(R)$ est non vide.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $J(R) = \emptyset$. Alors $F(R) = \overline{\mathbb{C}}$, i.e. la famille $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est normale sur $\overline{\mathbb{C}}$. Donc il existe une extraction $\Phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $(R^{\Phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{C}}$ (et donc sur $\overline{\mathbb{C}}$ tout entier) vers une fonction polynomiale S (en vertu du lemme précédent). On obtient une contradiction sur le degré de S : $\deg(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R^{\Phi(n)}) = +\infty$ ce qui est impossible ($\deg(S) < +\infty$). Donc $J(R) \neq \emptyset$. □

On achève cette partie avec la proposition ci-dessous, qui est utile pour simplifier certaines preuves et qui découle des différentes définitions.

Proposition 2.1. *Soient R et S deux polynômes conjugués. Alors $F(R) = F(S)$ (et $J(R) = J(S)$).*

EXEMPLE 2.2. L'exemple des polynômes du second degré illustre l'intérêt de la notion de conjugaison. Considérons en effet un polynôme $R : z \mapsto az^2 + 2bz + d$ avec $(a, b, d) \in \mathbb{C}^3$. Nous allons montrer que l'on peut conjuguer R à un polynôme de la forme $S : z \mapsto z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$. Considérons en effet la transformation de Möbius $M : z \mapsto az + b$, et posons $c = ad + b - b^2$. Alors on a bien :

$$\begin{aligned} \forall z \in \overline{\mathbb{C}}, (M^{-1} \circ S \circ M)(z) &= \frac{1}{a} \left((az + b)^2 + c - b \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(a^2 z^2 + 2abz + b^2 + ad + b - b^2 - b \right) \\ &= az^2 + 2bz + d \\ &= R(z) \end{aligned}$$

Ainsi, pour comprendre la dynamique de tous les polynômes du second degré, il est suffisant d'étudier la dynamique des polynômes de la forme $z \mapsto z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ (lesquels ne dépendent que d'un paramètre complexe, et non de trois!).

3 Étude locale : dynamique au voisinage des points périodiques

Dans cette section, on étudie le comportement des itérées de R au voisinage de points périodiques. On verra par la suite que l'on peut décrire explicitement l'ensemble de Julia $J(R)$ à l'aide des points périodiques pour R .

On commence par proposer une classification des points périodiques.

Définition 3.12 (Valeur propre d'une orbite). *Soit z_0 un point périodique de période n . On appelle valeur propre de l'orbite $O^+(z_0)$ de z_0 le nombre $\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0)$.*

Remarque 3.5. La règle de la chaîne assure que la valeur λ_{z_0} ne dépend pas du point de l'orbite que l'on considère dans la définition. En effet, si on note $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ les points de $O^+(z_0)$, alors on a :

$$\begin{aligned} (R^n)'(z_0) &= R'(z_0) \times (R^{n-1})'(R(z_0)) \\ &= R'(z_0) \times (R^{n-1})'(z_1) \\ &= R'(z_0) \times R'(z_1) \times (R^{n-2})'(R(z_1)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(z_k) \end{aligned}$$

La valeur propre d'une orbite donne une idée de la façon dont les points au voisinage de z_0 se rapprochent ou s'éloignent de l'orbite $O^+(z_0)$ sous l'action des itérées de R . Cela justifie l'introduction du vocabulaire suivant.

Définition 3.13. *Soit z_0 un point périodique. On dit que son orbite est :*

1. *Attractive* si $0 < |\lambda_{z_0}| < 1$.
2. *Super-attractive* si $\lambda_{z_0} = 0$.
3. *Répulsive* si $|\lambda_{z_0}| > 1$.
4. *Neutre* si $|\lambda_{z_0}| = 1$.

Par abus de langage, on utilisera ces mêmes adjectifs pour qualifier le point z_0 (plutôt que son orbite).

Propriété 3.3. *Soit z_0 un point périodique. Alors :*

- (i) *Si l'orbite $O^+(z_0)$ est attractive ou super-attractive, alors elle est incluse dans $F(R)$.*
- (ii) *Si l'orbite $O^+(z_0)$ est répulsive, alors elle est incluse dans $J(R)$.*

Démonstration. Soit z_0 un point périodique de période $n \in \mathbb{N}^*$.

- (i) Supposons que $O^+(z_0)$ est une orbite attractive ou super-attractive. On va montrer que la famille des itérées de R est équicontinue sur tout compact inclus dans un voisinage de l'orbite.

Soit U un voisinage de $O^+(z_0)$ sur lequel $|(R^n)'| \leq \frac{1+|\lambda_{z_0}|}{2}$ (un tel voisinage existe car $(R^n)'$ est continue). On peut supposer que U est une union de disques centrés en les points de $O^+(z_0)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\forall (x, y) \in U^2, |R^n(x) - R^n(y)| \leq \frac{1+|\lambda_{z_0}|}{2}|x - y|$$

En particulier, R^n est contractante sur U , et comme U contient un point fixe de R^n , on a $R^n(U) \subset U$. Par récurrence, on obtient que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R^{kn}(U) \subset U$.

Comme R est continue, il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $R(V), R^2(V), \dots, R^{n-1}(V) \subset U$. Soit un tel V . Alors R^n est $\frac{1+|\lambda_{z_0}|}{2}$ -lipschitzienne sur $V, R(V), \dots, R^{n-1}(V)$.

On note $K = \max_{0 \leq k \leq n-1} |(R^k)'|_V$, où $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|R^k|_V = \sup_{x \in V} |R^k(x)|$.

Pour $p \in \llbracket n, +\infty \rrbracket$, en notant $p = nk + r$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) la division euclidienne de p par n , on obtient :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in V^2, |R^p(x) - R^p(y)| &\leq \left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2} \right) |R^{(k-1)n}(R^r(x)) - R^{(k-1)n}(R^r(y))| \\ &\leq \left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2} \right)^k |R^r(x) - R^r(y)| \\ &\leq \left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2} \right)^k K|x - y| \\ &\leq K|x - y| \end{aligned}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, R^p est K -lipschitzienne sur V . On en conclut que la famille $\{R^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinue sur V .

Donc $O^+(z_0) \subset F(R)$

(ii) Supposons que $O^+(z_0)$ est une orbite répulsive. On va montrer que pour tout voisinage U de $O^+(z_0)$, il existe un compact de U sur lequel la famille des itérées de R n'est pas équicontinue.

Soit U un voisinage de $O^+(z_0)$. On peut supposer que U est une union de disques centrés en les points de $O^+(z_0)$, et quitte à restreindre U , on peut supposer que $\forall z \in U$, $|(R^n)'(z)| > \frac{1+|\lambda_{z_0}|}{2}$ (toujours par continuité de $(R^n)'$).

Notons r le rayon minimal des disques composant U (i.e. en notant $O^+(z_0) = (z_0, z_1, \dots, z_k)$ et $U = \bigcup_{i=0}^k D(z_i, r_i)$, avec $(r_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$, on note $r = \min_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} r_i$). Posons $\epsilon = \frac{r}{2}$. Soit $\delta > 0$.

Par continuité du taux d'accroissement en z_0 , quitte à restreindre encore U , on a :

$$\forall x \in U |R^n(x) - R^n(z_0)| > \frac{1+|\lambda_{z_0}|}{2}|x - z_0|$$

Soit $z \in U$ tel que $z \neq z_0$ et $|z - z_0| < \delta$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $R^{(k+1)n}(z) \in U$ alors

$$\begin{aligned} |R^{(k+1)n}(z) - R^{(k+1)n}(z_0)| &= |R^n(R^{kn}(z)) - R^n(R^{kn}(z_0))| \\ &= |R^n(R^{kn}(z)) - R^n(z_0)| \\ &> \left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2}\right) |R^{kn}(z) - z_0| \end{aligned}$$

Donc $R^{kn}(z) \in U$ aussi. Par récurrence descendante, on obtient que $\forall j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $R^{jn}(z) \in U$, et en itérant, on obtient :

$$|R^{(k+1)n}(z) - R^{(k+1)n}(z_0)| > \left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2}\right)^{k+1} |z - z_0|$$

Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1 + |\lambda_{z_0}|}{2}\right)^{K+1} > \frac{\epsilon}{|z - z_0|}$.

Si $\forall k \in \llbracket 1, K+1 \rrbracket$, $R^{(k+1)n}(z) \in U$, alors les inégalités précédentes s'appliquent et on obtient :

$$|R^{(k+1)n}(z) - R^{(k+1)n}(z_0)| > \epsilon$$

Sinon, $\exists k \in \llbracket 1, K+1 \rrbracket$, $R^{(k+1)n}(z) \notin U$, c'est-à-dire

$$|R^{(k+1)n}(z) - z_0| > r > \epsilon.$$

On a donc montré que :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists z \in U \text{ tel que } |z - z_0| < \delta \text{ et } |R^{(k+1)n}(z) - R^{(k+1)n}(z_0)| > \epsilon.$$

En particulier, R^k n'est pas équicontinue sur le disque fermé centré en z_0 de rayon $\min(\delta, \frac{r}{2})$ (compact de U). Donc (R^k) n'est pas équicontinue sur tout compact de U .

Donc $O^+(z_0) \subset J(R)$

□

Les deux théorèmes suivants décrivent plus précisément la dynamique de R au voisinage de points périodiques attractifs ou super-attractifs. Leurs conclusions seront utiles dans la partie 5, pour comprendre le caractère fractal que présentent beaucoup d'ensembles de Julia. Pour alléger les notations, on note λ pour λ_{z_0} , dans ce qui suit.

THÉORÈME 3.3 (Dynamique des orbites attractives). Soient $O^+(z_0)$ une orbite attractive, n la période de z_0 et $\lambda \in]-1, 1[$ la valeur propre de cette orbite. Alors, il existe un voisinage U de z_0 , $r \in \mathbb{R}_+^*$ et un unique homéomorphisme $\Phi: U \rightarrow D_r$ (où D_r désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon r dans \mathbb{C}) tel que $\Phi(z_0) = 0$, $\Phi'(z_0) = 1$, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^n} & U \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ D_r & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & D_r \end{array}$$

Démonstration. Pour une preuve détaillée de ce point, on pourra consulter [SM71].

Le point clé de la preuve (qu'on admet ici) est de montrer que la famille $\left(\frac{R^k}{\lambda^k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur U vers une fonction holomorphe $\Phi: U \rightarrow D_r$ (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$).

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \|\Phi \circ R^n - \lambda \Phi\|_\infty^U &\leq \|\Phi \circ R^n - \frac{R^{k+1}}{\lambda^k}\|_\infty^U + \|\lambda \frac{R^{k+1}}{\lambda^{k+1}} - \lambda \Phi\|_\infty^U \\ &\leq \|\Phi \circ R^n - \frac{R^{k+1}}{\lambda^k}\|_\infty^U + \lambda \|\frac{R^{k+1}}{\lambda^{k+1}} - \Phi\|_\infty^U \end{aligned}$$

Dons, par convergence uniforme de la suite $\left(\frac{R^k}{\lambda^k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers Φ sur U , on a : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k > N$, $\|\Phi \circ R^n - \lambda \Phi\|_\infty^U \leq \epsilon + \lambda \epsilon$, c'est-à-dire (en faisant tendre ϵ vers 0) : $\forall x \in U$, $\Phi \circ R^n(x) = \lambda \Phi(x)$. \square

THÉORÈME 3.4 (Dynamique des orbites super-attractives). Soient $O^+(z_0)$ une orbite super-attractive et n la période de z_0 . Soit $k \geq 2$ tel que $(R^n)'(z_0) = (R^n)^{(2)}(z_0) = \dots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $(R^n)^{(k)} \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de z_0 , $r \in \mathbb{R}_+^*$ et un homéomorphisme $\Phi: U \rightarrow D_r$ tel que $\Phi(z_0) = 0$, $\Phi'(z_0) = 1$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^n} & U \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ D_r & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & D_r \end{array}$$

Démonstration. Pour une preuve détaillée de ce point, on pourra consulter [Fat19], pages 187-189. \square

La dynamique des points neutres est plus délicate à étudier, certaines questions sont encore ouvertes à ce sujet. Nous ne discuterons pas de ce cas dans cette étude.

4 Propriétés générales des ensembles de Julia

La majorité des résultats de cette section utilise le théorème fondamental ci-dessous.

THÉORÈME 4.5. Soient U un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ et \mathcal{F} une famille de fonctions méromorphes de $U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Supposons qu'il existe trois points distincts $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{C}}^3$ tels que :

$$\left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) \right) \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

Alors \mathcal{F} est une famille normale sur U .

Démonstration. On pourra consulter [Thu]. □

4.1 Les ensembles de Julia sont compacts

Commençons par remarquer que :

Lemme 4.2. Soient $z \in J(R)$ et U un voisinage ouvert de z . Alors l'ensemble :

$$E_U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R^n(U) \right)$$

contient au plus deux points.

Démonstration. Par contraposée du théorème 4.5, on obtient immédiatement le résultat. □

Définition 4.14 (Points exceptionnels). Les points des ensembles E_U tels que définis dans la proposition précédente sont appelés points exceptionnels.

EXEMPLE 4.3. Considérons $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ un polynôme. Alors le point ∞ est un point fixe pour R (car $R(\infty) = \infty$). En remarquant qu'au voisinage de ∞ , un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, on montre³ que $\infty \in F(R)$. Par conséquent, l'ensemble de Julia $J(R)$ est contenu dans \mathbb{C} . Comme on a de plus : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, on obtient en vertu du lemme 4.2 que ∞ est un point exceptionnel pour R .

Cet exemple permet de démontrer la propriété ci-dessous.

THÉORÈME 4.6. L'ensemble de Julia est compact.

Démonstration. D'après la partie 2, on sait déjà que l'ensemble de Julia est fermé. Il suffit donc de montrer qu'il est borné (car compact \Leftrightarrow fermé et borné, en dimension finie). Or, l'exemple ci-dessus donne que $\infty \in F(R)$. D'où le résultat. □

3. On montre qu'il existe un voisinage de ∞ sur lequel la suite des itérées de R converge uniformément vers la fonction constante $z \mapsto \infty$. Les manipulations à effectuer pour ce faire sont parfaitement similaires à celles développées dans l'exemple 2.2 sur le polynôme $z \mapsto z^2$.

4.2 Les ensembles de Julia sont généralement d'intérieur vide

THÉORÈME 4.7. *Si $\text{Int}(J) \neq \emptyset$, alors $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Supposons $\text{Int}(J(R)) \neq \emptyset$, et soit U un ouvert contenu dans l'intérieur de $J(R)$. Alors, par invariance complète de l'ensemble de Julia (cf. partie 2), on a (en conservant les notations de la partie précédente) :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(U) = (\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U) \subset J(R)$$

Or, d'après le lemme 4.2, E_U contient au plus deux points. Donc $\overline{(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U)} = \overline{\mathbb{C}}$. Mais on sait de plus (cf. partie 2) que $J(R)$ est fermé. Donc $\overline{\mathbb{C}} \subset J(R)$ i.e. $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$. □

4.3 Les ensembles de Julia sont des ensembles parfaits

Définition 4.15 (Ensemble parfait). *Un ensemble parfait d'un espace topologique est une partie fermée sans point isolé.*

Remarque 4.6. Le point ∞ est un point très particulier, pour un polynôme R : il s'agit d'un point fixe, dont l'unique image réciproque est lui-même (car $\forall z \in \mathbb{C}, |R(z)| < +\infty$ donc $R(z) \neq \infty$). Cette remarque motive le lemme ci-dessous, qui sera utile pour démontrer la propriété qui nous intéresse.

Lemme 4.3. *Soit a un point fixe de R dont l'unique image réciproque par R est lui-même. Alors R peut être conjugué à un autre polynôme S via une transformation de Möbius envoyant a sur ∞ .*

Démonstration. Soit un tel point $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Si $a = \infty$, il suffit de prendre l'identité comme transformation de Möbius. Supposons donc $a \neq \infty$, et posons :

$$M : \begin{array}{l|ll} & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ & z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} & \longmapsto \frac{1}{z-a} \\ & a & \longmapsto \infty \\ & \infty & \longmapsto 0 \end{array}$$

M est alors bien une transformation de Möbius qui envoie a sur ∞ . De plus :

$$M^{-1} : \begin{array}{l|ll} & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longmapsto \frac{1}{z} + a \\ & 0 & \longmapsto \infty \\ & \infty & \longmapsto a \end{array}$$

Donc, en notant $S = M \circ R \circ M^{-1}$, on a $S(0) = 0$, $S(\infty) = \infty$ et $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $S(z) = \frac{1}{R(M^{-1}(z)) - a}$. Or, l'unique image réciproque de a par R est a . Comme $M(a) = \infty$, on obtient que la fraction rationnelle $S|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ n'admet pas de pôle dans \mathbb{C} : c'est donc un polynôme. S étant par ailleurs continue en 0 , obtient donc bien que S est un polynôme de $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. □

Lemme 4.4. $\forall a \in J(R)$, $\exists b \in J(R)$ tel que $a \in O^+(b)$ mais $b \notin O^+(a)$.

Démonstration. Soit $a \in J(R)$.

- Si a n'est pas périodique, alors $R^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ car \mathbb{C} est algébriquement clos, et n'importe quel $b \in R^{-1}(\{a\})$ convient.
- Sinon, notons n la période de a et $S = R^n$. Considérons alors l'équation $S(z) = a$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$. a est alors l'unique solution de cette équation dans $O^+(a)$ (par définition de la n -périodicité). Si a est l'unique solution de cette équation dans $\overline{\mathbb{C}}$, alors en vertu du lemme précédent, on peut conjuguer S à un autre polynôme P via une transformation de Möbius envoyant a sur ∞ . Or, on sait que $\infty \in F(P)$. Donc (par conjugaison) $a \in F(R)$, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, l'équation $S(z) = a$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ admet une autre solution $b \in \overline{\mathbb{C}}$, et $b \notin O^+(a)$. □

THÉORÈME 4.8. *L'ensemble de Julia $J(R)$ est un ensemble parfait.*

Remarque 4.7. Cf. partie 2, on sait déjà que $J(R)$ est une partie fermée de $\overline{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Soit $a \in J(R)$. Il s'agit de prouver que a est un point d'accumulation de $J(R)$. Soit U un voisinage de a . Soit b comme dans le lemme 4.4 : $b \in J(R)$ tel que $a \in O^+(b)$ mais $b \notin O^+(a)$. Comme $b \in J(R)$, on sait que b n'est pas un point exceptionnel. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b \in R^k(U)$. Soit un tel k , et soit $c \in U$ tel que $R^k(c) = b$. Alors $c \neq a$ puisque $b \notin O^+(a)$, et $c \in J(R)$ puisque J est invariant par R^{-1} . Donc a est bien un point d'accumulation de $J(R)$. □

4.4 L'ensemble de Julia $J(R)$ est l'adhérence des points périodiques ré-pulsifs pour R

Dans cette partie, on obtient une caractérisation assez visuelle de ce que sont les ensembles de Julia.

THÉORÈME 4.9. *L'ensemble de Julia $J(R)$ est inclus dans l'adhérence de tous les points périodiques de R .*

Démonstration. On considère la sous-partie K de $J(R)$ définie par :

$$K = J(R) \setminus \{\text{points critiques de } R\}^4$$

4. On rappelle que les points critiques de R sont les points $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tels que $R'(z) = 0$.

R étant un polynôme, on obtient donc que K et J diffèrent d'un nombre fini de points. De plus, $J(R)$ étant un ensemble parfait, il n'admet pas de point isolé. Donc $\overline{K} = \overline{J} = J$. Il s'agit donc de prouver que $\overline{K} \subset \{\text{points périodiques de } R\}$.

Soient $w \in K$ et U un voisinage de w . Notons qu'on a alors $w \neq \infty$ (cf. section 4.1). Raisonnons par l'absurde et supposons que U ne contienne pas de point périodique de R .

On va montrer que, quitte à restreindre U , il existe un inverse local $I : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Considérons pour cela l'ensemble des antécédents de w par R . w n'étant pas un point critique de R et \mathbb{C} étant algébriquement clos, il y en a exactement $d = \deg(R)$ distincts. Ainsi, l'un au moins de ces antécédents n'est pas racine de R' . Soit x un tel antécédent : $R(x) = w$ et $R'(x) \neq 0$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe V un voisinage de x , W un voisinage de w et $I : W \rightarrow V$ vérifiant $(I \circ R)|_V = \text{Id}_V$ et $(R \circ I)|_W = \text{Id}_W$. L'inverse local I de R est de plus holomorphe sur W , car R l'est. Quitte à restreindre U (en l'intersectant avec le voisinage W obtenu par TIL), on obtient donc l'application $I : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ voulue.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$g_k : \begin{cases} U & \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto \frac{R^k(z) - z}{I(z) - z} \end{cases}$$

Alors $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille normale si et seulement si la famille $(R^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ l'est aussi. Or $w \in J$ donc (g_k) n'est normale sur aucun ouvert V de U contenant w .

Or, on note que : $\forall z \in U$, $g_k(z) \neq 0$ car U ne contient pas de point périodique, et $\forall z \in U$, $g_k(z) \neq \infty$ car U ne contient pas de point périodique donc en particulier pas de point stable. De plus, $g_k(z) = 1$ si et seulement si $R^k(z) = I(z)$, c'est-à-dire si et seulement si z est périodique ($R^{k+1}(z) = z$). Donc $\forall z \in U$, $g_k(z) \neq 1$. Ainsi, les images des $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne rencontrent pas les trois points de $\overline{\mathbb{C}}$ que sont 0, 1 et ∞ . Donc, d'après le théorème 4.5, cette famille est normale, ce qui est absurde.

On en conclut que le voisinage U de w rencontre l'ensemble des points périodiques de R , c'est-à-dire que $w \in \overline{\{\text{points périodiques de } R\}}$. □

Proposition 4.2. *Il y a un nombre fini d'orbites attractives, d'orbites super-attractives et d'orbites neutres.*

Démonstration. Pour une preuve de ce résultat, on pourra consulter [Bla84] □

On en déduit le théorème :

THÉORÈME 4.10. *L'ensemble de Julia est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs.*

Démonstration. Rappelons déjà que tout point périodique répulsif est dans l'ensemble de Julia. Comme l'ensemble de Julia est fermé, il contient donc l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Il reste donc à montrer l'autre inclusion.

Soit $z \in J(R)$.

Il y a un nombre fini de points périodiques neutres, attractifs et super-attractifs donc :

$$\begin{aligned} & \overline{\{\text{Points périodiques de } R\} \setminus \{\text{Points périodiques non répulsifs de } R\}} \\ &= \\ & \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs}\} \cup \{\text{Points périodiques non répulsifs}\} \setminus \{\text{Points périodiques non répulsifs}\}} \\ &= \\ & \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs de } R\} \setminus \{\text{Points périodiques non répulsifs}\}} \\ &= \\ & \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs de } R\} \setminus \{\text{Points périodiques non répulsifs}\}} \end{aligned}$$

car d'après la proposition 4.2, $\{\text{Points périodiques non répulsifs}\}$ est un ensemble fini, donc d'une part son adhérence est égale à lui-même, et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} & \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs}\} \cup \{\text{Points périodiques non répulsifs}\}} \\ &= \\ & \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs}\} \cup \{\text{Points périodiques non répulsifs}\}} \end{aligned}$$

Si $z \notin \{\text{Points périodiques non répulsifs de } R\}$, alors l'égalité précédente et le théorème 4.9 montrent que :

$$z \in \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs de } R\}}$$

Sinon, z est un point périodique non répulsif. Donc c'est un point neutre, attractif ou super-attractif. Comme $z \in J(R)$, il est nécessairement neutre. Or, l'ensemble de Julia est contenu dans l'adhérence des points périodiques répulsifs et n'a pas de point isolé. Donc il existe une suite non stationnaire de points périodiques qui tend vers z . Comme il y a un nombre fini de points périodiques neutres, attractifs et super-attractifs, quitte à extraire, cette suite est composée uniquement de points périodiques répulsifs. D'où :

$$z \in \overline{\{\text{Points périodiques répulsifs de } R\}}$$

On a donc obtenu l'inclusion réciproque, ce qui achève la preuve. □

5 Discussion autour du caractère fractal des ensembles de Julia

Dans cette partie, on s'attache à comprendre le caractère "fractal" que présentent les ensembles de Julia : si l'on regarde au voisinage d'un point de l'ensemble de Julia, la courbe "ressemble" à la courbe entière ! Les figures 1, 2, 3 et 4 présentées ci-dessous illustrent cette notion d'auto-similarité des ensembles de Julia. Elles sont toutes issues de [Bla84].

À la lumière des propriétés démontrées dans ce document, cette propriété d'auto-similarité n'est en réalité pas très surprenante, bien que difficile à formaliser précisément. On se contentera ici de donner les éléments qui permettent de comprendre cette intuition.

Tout d'abord, d'après le théorème 4.10, les points périodiques répulsifs pour R sont denses dans l'ensemble de Julia $J(R)$. Considérons donc un point périodique répulsif z_0 , de période n . C'est alors un point périodique attractif pour R^{-1} .

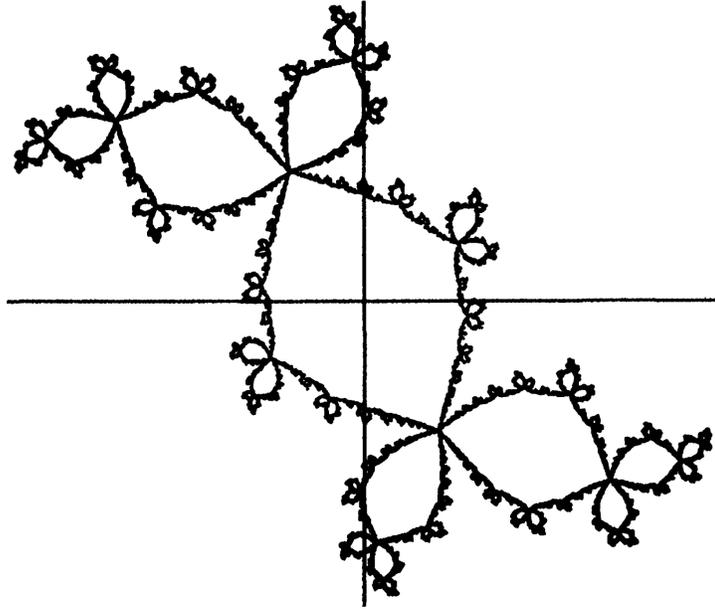


FIGURE 1 – Lapin de Douaddy : ensemble de Julia du polynôme $z \mapsto z^2 + c$ avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 1$ et $\Im(c) > 0$

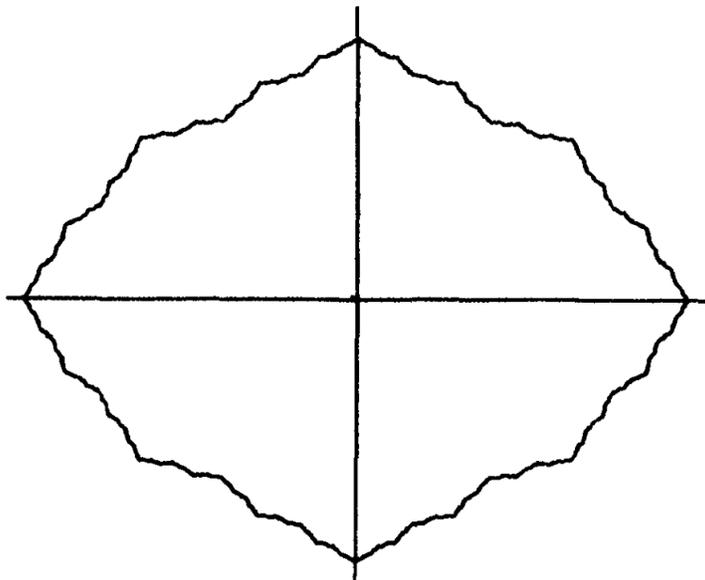


FIGURE 2 – Ensemble de Julia du polynôme $z \mapsto z^2 - 0.3125$

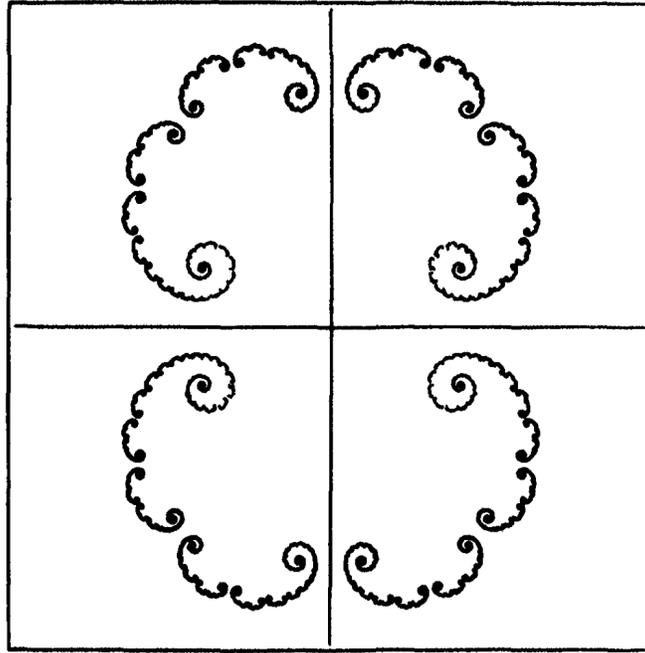


FIGURE 3 – Ensemble de Julia du polynôme $z \mapsto z^2 + 3$

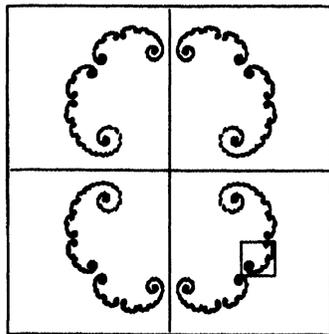


FIGURE a

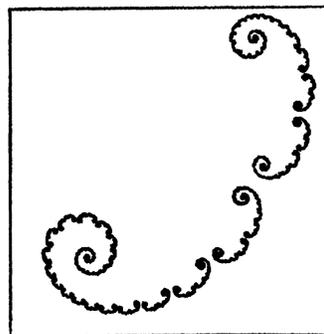


FIGURE b

FIGURE 4 – Détails de l'ensemble de Julia du polynôme $z \mapsto z^2 + 3$: la figure b est un agrandissement de la figure a au niveau du cadre qui y apparaît

En admettant que le théorème 3.3 sur la dynamique des orbites attractives s'applique non seulement aux polynômes mais à toutes les applications méromorphes, on obtient que R^{-n} (où R^{-n} désigne la n -ième itérée de R^{-1}) est localement (au voisinage de z_0) conjuguée à une similitude. Donc tout voisinage de z_0 assez petit est transformé par R^{-n} en une copie de lui-même, réduite (car z_0 étant un point périodique attractif de R^{-n} , on obtient que R^{-n} est conjuguée à une similitude *contractante* au voisinage de z_0), et éventuellement "tournée".

Or, d'après la propriété 2.2, l'ensemble de Julia est invariant par R^{-n} . Ainsi, en appliquant R^{-n} à un voisinage de z_0 dans l'ensemble de Julia, on obtient une copie réduite et éventuellement tournée du voisinage en question (par conjugaison à une similitude contractante), qui reste dans l'ensemble de Julia (par invariance). Associé à la densité des points périodiques répulsifs, ceci explique donc que, localement, un ensemble de Julia semble être une copie de lui-même.

Parfois le caractère "fractal" est global : c'est ce qu'on observe par exemple sur la figure 1.

Toutefois, ce caractère "fractal" n'est parfois que local : c'est le cas de l'ensemble de Julia du polynôme $z \mapsto z^2$. On a en effet vu que l'ensemble de Julia associé à ce dernier polynôme est le cercle unité, et on remarque que dans ce cas, localement, le cercle "ressemble" à une droite (laquelle est bien autosimilaire).

Bibliographie

- [Bla84] Paul Blanchard. Complex analytic dynamics on the riemann sphere. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, July 1984.
- [Fat19] Fatou. *Sur les equations différentielles*. Bull. Soc. Math. France, 1919.
- [Sch97] Laurent Schwartz. *Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie*. Hermann, 1997.
- [SM71] Siegel and Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Springer-Verlag, 1971.
- [Thu] W. Thurston. Lecture notes, cbms conference university of minesota.