Ma tentative de dessiner la décomposition Anosov du flot géodésique

Magali Jay

Novembre 2022

Le flot géodésique sur une surface de genre au moins 2 est un flot Anosov.

Il y a quelques jours, je me suis demandé comment voir sur un dessin la décomposition en espaces stable et instable associé à ce flot (le premier exemple de flot Anosov, et j'imagine le plus simple), espérant ainsi mieux sentir, voire mieux comprendre, les flots Anosov. Je me suis heurtée à plusieurs difficultés. Certaines m'ont amenée à préciser les définitions de flot et flot Anosov que j'avais en tête. D'autres sont toujours en suspens, ouvrant tout un univers de mathématiques à explorer !

Le but de ce petit texte est de donner une image de ce flot et de la décomposition en espaces stable et instable. Je commence par donner la définition d'un flot et d'un flot Anosov, je propose ensuite un dessin du flot géodésique sur l'espace hyperbolique et des directions stable et instable de ce flot. Je pointe enfin les limites de ce dessin.

Merci à Neige Paulet pour ces explications sur les flots Anosov, à Adrien Boulanger pour l'introduction aux géométries de Thurston, à Adrien Abgrall, Mingkun Liu et Marie Trin d'avoir réfléchi avec moi à ce dessin à Orsay. Un deuxième merci à Marie Trin pour les dessins sur LaTeX.

1 Qu'est-ce qu'un flot (Anosov) ?

Définition 1.1. *Un flot Φ sur une variété M est la donnée d'une famille (continue) de difféomorphismes, formant un groupe à un paramètre $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s.$$

Nécessairement, $\Phi^0 = id_M$. Cela représente la position initiale du flot, puis $\Phi^t(x)$ donne l'endroit où le point $x \in M$, transporté par le flot, est arrivé au temps t.

La notion de flot est étroitement liée à celle de champ de vecteurs. En effet, si on pose $X_x = \frac{d}{dt}_{|t=0}\Phi^t(x)$, alors X est un champ de vecteurs, tous tangents aux trajectoires du flot $(\gamma_x : t \mapsto \Phi^t(x))$. On représente d'ailleurs souvent un flot par le champ de vecteurs associé.

Définition 1.2. *Soit M une variété fermée (compacte sans bord) de dimension au moins 3. Soit Φ un flot sur M. On dit que Φ est Anosov s'il existe une décomposition (1) invariante (2) par Φ de l'espace tangent TM en la direction du flot (3), un espace stable (4) et un espace instable (5). C'est-à-dire s'il existe, pour tout $x \in M$, des sous-espaces $E_f(x)$, $E_s(x)$ et $E_i(x)$ de T_xM tels que :*

$$\forall x \in M, T_xM = E_s(x) \oplus E_i(x) \oplus E_f(x) \qquad (1)$$

où

$$\forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (D_x\Phi^t)(E_s(x)) \subset E_s(\Phi^t(x)) \\ (D_x\Phi^t)(E_i(x)) \subset E_i(\Phi^t(x)) \\ (D_x\Phi^t)(E_f(x)) \subset E_f(\Phi^t(x)) \end{cases} \qquad (2)$$

avec

$$\forall x \in M, E_f(x) = \mathbb{R}.\frac{d}{dt}_{|t=0}\Phi^t(x) \qquad (3)$$

et

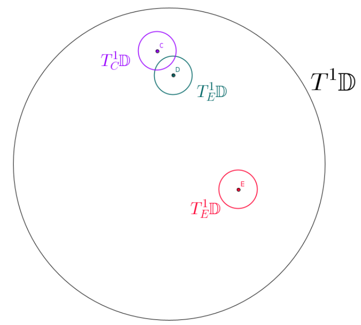
$$\exists C > 0, \lambda > 1, \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} \forall v \in E_s(x), ||D_x\Phi^t(v)|| \leqslant \frac{1}{C\lambda^t}||v|| & (4) \\ \forall v \in E_i(x), ||D_x\Phi^t(v)|| \geqslant C\lambda^t||v|| & (5). \end{cases}$$

Remarque 1.3. *La décomposition* (1) *implique que le flot n'a pas de point singulier. L'hyperbolicité (contraction et dilatation) implique la continuité de la décomposition. En fait, l'inégalité* (4) *caractérise l'espace stable. Pour caractériser l'espace instable, il faut faire une petite modification :* $v \in E_i(x) \Leftrightarrow ||D_x\Phi^{-t}(v)|| \leqslant \frac{1}{C\lambda^t}||v||$

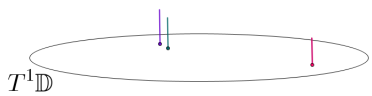
2 Un dessin du flot géodésique sur le plan hyperbolique

2.1 Comment voir le fibré unitaire tangent au plan hyberbolique ?

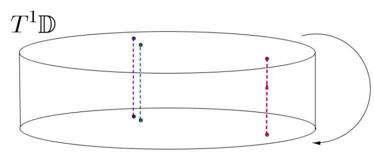
On se place dans le modèle du disque de Poincaré $\mathbb{D}$. Le fibré unitaire tangent est, par définition et d'un point de vue formel : $T^1\mathbb{D} = \{(x,u)|x \in \mathbb{D}, u \in \mathbb{S}^1\}$. On peut se représenter cet espace comme le disque avec un cercle "accroché" en chaque point [1]. Le problème, c'est que des points se chevauchent.



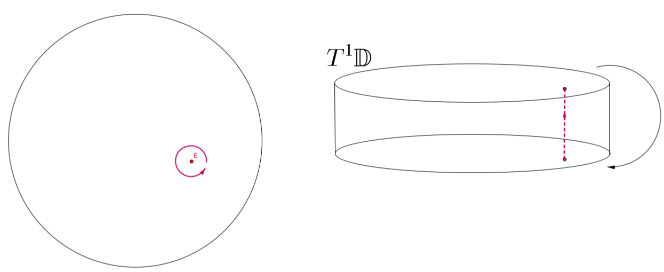
Pour avoir une image plus proche de $T^1\mathbb{D}$, il suffit de se rappeler qu'un cercle n'est rien d'autre qu'un segment dans lequel les deux extrémités sont identifiées. Plutôt que d'accrocher des cercles en chaque point, accrochons des segments. Si on les place perpendiculairement au disque, aucun point ne se chevauche (dans $\mathbb{R}^3$) !



On a obtenu un cylindre plein, ouvert, dans lequel on identifie la tranche supérieure et la tranche inférieure.

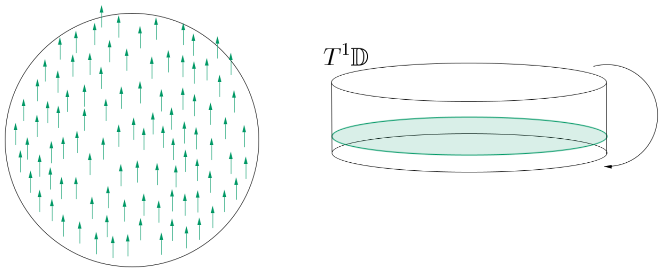


C'est-à-dire un tore plein ouvert. Dans ce tore, se déplacer le long d'un équateur "qui fait le tour du trou du tore" revient à se déplacer le long d'une courbe $u \mapsto (x_0, u)$ avec x_0 fixé.



1. Pour faire chic, il faut dire que c'est un espace fibré en cercles

Chaque "tranche" du tore (obtenue en coupant le tore - comme on l'imagine dans $\mathbb{R}^3$ - par un plan contenant l'axe de symétrie de révolution du tore) correspond à un ensemble de vecteurs tangents (x, u_0) de direction u_0 donnée (donc chaque tranche correspond à un plan hyperbolique).



2.2 Le flot géodésique

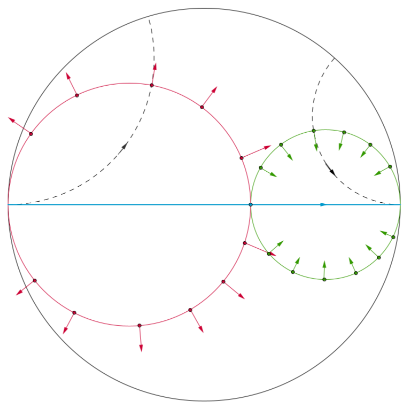
Le flot géodésique agit sur le fibré unitaire tangent du plan hyperbolique. En effet, à chaque couple (p, v) où $p \in \mathbb{D}$ et $v \in \mathbb{S}^1$, il correspond une unique géodésique γ (celle qui passe par p - au temps 0 - avec la direction v). Le flot géodésique envoie $(p, v) = (\gamma(0), \gamma'(0))$ sur $(\gamma(t), \gamma'(t))$. Bref, il suit les géodésiques.

3 Décomposition de l'espace tangent en un point

Le flot géodésique sur le plan hyperbolique n'est pas un flot Anosov car le plan hyperbolique n'est pas compact... Mais cela n'empêche pas de voir des directions stables et instables.

3.1 En ignorant l'absence de compacité

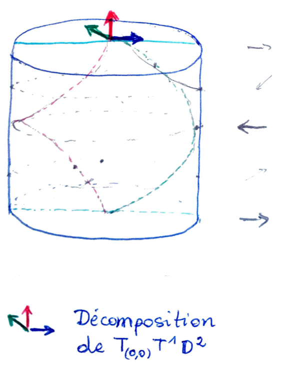
Considérons $(p, v) = (0, 0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \cong T^1\mathbb{D}$ un point du fibré unitaire tangent[2]. La géodésique γ associée est donc le diamètre de $\mathbb{D}$ "orienté horizontalement". Considérons les deux horocycles passant par $p = 0$ et coupant γ perpendiculairement[3]. On munit chacun des point de ces horocycles des vecteurs normaux entrants pour l'un, sortant pour l'autre. Alors les géodésiques associées à ces points de l'espace unitaire tangent sont les unes se rapprochant de γ (exponentiellement vite), les autres s'en éloignant. Ce sont les directions stable et instable que l'on veut voir. On les voit souvent dessinées de la façon suivante.



Il s'agit maintenant de tracer les points correspondants dans le dessin de $T^1\mathbb{D}$.

2. Attention, c'est une équivalence topologique et non métrique ! La métrique produit sur $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ n'est pas $SL_2(\mathbb{R})$-invariante, alors que celle de $T^1\mathbb{D}$ l'est.

3. On confond la fonction γ et son image.



Attention, ce tracé est très piégeux, on y voit mal la perspective. Une autre tentative avec géogebra donne l'image suivante (elle aussi améliorable, mais ce sera pour une prochaine fois...).

3.2 Sur une surface

Il faudrait refaire un dessin plus juste en prenant le domaine fondamental de l'action d'un sous-groupe discret cocompact de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ à la place du disque de Poincaré. A vous de jouer ! Ou d'attendre le prochain épisode (non programmé)...

4 Conclusion

Je suis entraînée bien plus loin que ce que j'imaginais en posant innocemment la question « Comment voir la décomposition Anosov du flot géodésique ? » ... En plus du dessin présenté, je retiens de cette petite promenade hyperbolique les trois points suivants.

— Le flot géodésique sur une surface est en fait un *flot sur le fibré unitaire tangent de la surface, et non sur la surface.* La décomposition en espaces stable et instable concerne donc l'espace tangent en chaque point du fibré unitaire tangent de la surface.

— Le dessin présenté est celui de la trivialisation du fibré unitaire tangent de l'espace hyperbolique. Il est seulement topologique, et non métrique. J'aimerais trouver une image métriquement fausse sur mon dessin pour souligner les limites de cette illustration.

— La surface doit être une surface fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) de genre au moins 2. On peut la voir comme un quotient de l'espace hyperbolique, mais ce n'est pas l'espace hyperbolique.

Je me contente pour le moment des dessins que j'ai obtenus. Ils permettent de visualiser la topologie du fibré unitaire tangent de l'espace hyperbolique, et les directions stables et instables. On y voit en particulier la non tangence de deux flots horocycliques qui semblent pourtant tangents sur un dessin dans $\mathbb{H}^2$. Je garde en tête qu'il en reste d'autres à tenter. Si vous en avez à me proposer, j'en serai bien sûr ravie.