

CONTRÔLE CONTINU # 1

le 13 février 2026 ; durée 1 heure ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : loi de 0-1 de Borel-Cantelli*

- i) Énoncer l'alternative de 0-1 de Borel-Cantelli. Fournir une démonstration de l'alternative simple ("0") du théorème.
- ii) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement $\{U_n \leq \frac{1}{n^\alpha}\}$.
 - a) Que vaut $\mathbb{P}(A_n)$?
 - b) On appelle A l'événement " A_n a lieu une infinité de fois". Donner une expression de l'événement A et ensuite déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des valeurs de α .

Exercice 2 *Lois de Weibull et de Gumbel*

Soient $\lambda > 0$, X une variable aléatoire réelle de loi à densité $f_X(x) = \frac{2}{\lambda^2} x e^{-(\frac{x}{\lambda})^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

- a) Justifier que f_X est bien une densité de probabilité, puis calculer la fonction de répartition F_X associée. En déduire $\mathbb{P}(X^2 \leq 1)$.
- b) Expliciter la loi de $Y = X^2$.
- c) Même question avec $Z = -\ln(X)$.

Exercice 3 *Partie entière, partie fractionnaire*

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, on considère la variable aléatoire $X(\omega) := -2 \ln \omega$.

- a) Trouver la fonction de répartition de X . Pour u, v réels positifs quelconques comparer $\mathbb{P}(X > u + v)$ et $\mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(X > v)$. X a-t-elle une loi remarquable ?
- b) On pose $Y := 1 + [X]$, où $[\cdot]$ note la fonction partie entière. Pour $k \geq 1$ entier calculer $\mathbb{P}(Y = k)$. S'agit-il d'une loi remarquable ?
- c) On note $Z := X - [X]$ la partie fractionnaire de X . Que vaut $Z(\Omega)$? Montrer que, pour tout réel t , $\{Z \leq t\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n \leq X \leq n + t\}$. En déduire la fonction de répartition de Z . Possède-t-elle une densité ? Si oui, trouver la densité.
- d) Z et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.