

CONTRÔLE CONTINU # 1

le 13 février 2026 ; durée 1 heure ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : loi de 0-1 de Borel-Cantelli*

- i) Énoncer l'alternative de 0-1 de Borel-Cantelli. Fournir une démonstration de l'alternative simple ("0") du théorème.

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements tels que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$. Si la suite d'événements $(A_n)_{n \geq 1}$ est indépendante, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ ou $= 1$, selon que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge ou diverge.

Supposons que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. On a $A := \limsup_n A_n \cap_{n \geq 1} \cup_{k \geq n} A_k$ donc $A \subset \cup_{k \geq n} A_k$ d'où $\mathbb{P}(A) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ car la série est convergente. On conclut que $\mathbb{P}(A) = 0$.

- ii) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement $\{U_n \leq \frac{1}{n^\alpha}\}$.

- a) Que vaut $\mathbb{P}(A_n)$?

Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \in]0, 1]$. Comme U_n suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, $F_U(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors $\mathbb{P}(A_n) = F_U(\frac{1}{n^\alpha}) = \frac{1}{n^\alpha}$.

- b) On appelle A l'événement " A_n a lieu une infinité de fois". Donner une expression de l'événement A et ensuite déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des valeurs de α .

Par définition $A = \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. D'après la loi du 0-1 de Borel-Cantelli, les événements A_n étant indépendants, $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \sum \mathbb{P}(A_n)$ converge $\iff \alpha > 1$. Donc $\mathbb{P}(A) = 0$ dès que $\alpha > 1$, $\mathbb{P}(A) = 1$ sinon.

Exercice 2 *Lois de Weibull et de Gumbel*

Soient $\lambda > 0$, X une variable aléatoire réelle de loi à densité $f_X(x) = \frac{2}{\lambda^2} x e^{-(\frac{x}{\lambda})^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

- a) Justifier que f_X est bien une densité de probabilité, puis calculer la fonction de répartition F_X associée. En déduire $\mathbb{P}(X^2 \leq 1)$.

f_X est bien une fonction mesurable (opérations avec des fonctions mesurables), positive compte tenu de son expression, et d'intégrale 1 car

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\lambda^2} e^{-(\frac{x}{\lambda})^2} dx = \left[-e^{-(\frac{x}{\lambda})^2} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, avec $X > 0$ p.s. (puisque $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$, $F_X(t) = 0$ si $t \leq 0$, et pour $t \geq 0$,

$$F_X(t) = \int_0^t f_X(x) dx = \left[-e^{-(\frac{x}{\lambda})^2} \right]_0^t = 1 - e^{-(\frac{t}{\lambda})^2}.$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(X^2 \leq 1) = \mathbb{P}(0 < X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda^2}}.$$

b) Expliciter la loi de $Y = X^2$.

Clairement, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc $F_Y(t) = 0$ si $t \leq 0$. Si $t \geq 0$, $F_Y(t) = P(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = P(0 < X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda^2}}$, puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda^2}$.

c) Même question avec $Z = -\ln(X)$.

Z est p.s. bien définie puisque $X > 0$ p.s. Cette fois-ci $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = P(Z \leq t) = \mathbb{P}(-\ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \geq e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t})$ par croissance de la fonction exponentielle. Comme $e^{-t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient $F_Z(t) = e^{-\frac{e^{-t}}{\lambda^2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Partie entière, partie fractionnaire*

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $]0, 1]$, on considère la variable aléatoire $X(\omega) := -2 \ln \omega$.

a) Trouver la fonction de répartition de X . Pour u, v réels positifs quelconques comparer $\mathbb{P}(X > u + v)$ et $\mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(X > v)$. X a-t-elle une loi remarquable ?

Déjà, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ puisque $\omega \in]0, 1]$. Donc $F_X(t) = 0$ si $t \leq 0$. Si $t \geq 0$, $F_X(t) = \lambda(-2 \ln \omega \leq t) = \lambda(\omega \geq e^{-\frac{t}{2}})$. Or, $t \geq 0$ donc $e^{-\frac{t}{2}} \in]0, 1]$ donc $F_X(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$. X suit donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On trouve $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\frac{t}{2}}$, pour tout t positif, et donc $\mathbb{P}(X > u + v) = e^{-\frac{u+v}{2}} = \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(X > v)$ pour tous u, v positifs.

b) On pose $Y := 1 + [X]$, où $[\cdot]$ note la fonction partie entière. Pour $k \geq 1$ entier calculer $\mathbb{P}(Y = k)$. S'agit-il d'une loi remarquable ?

Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}([X] = k - 1) = \mathbb{P}(k - 1 \leq X < k) = F_X(k) - F_X(k - 1) \\ &= e^{-\frac{k-1}{2}} - e^{-\frac{k}{2}} = e^{-\frac{k-1}{2}}(1 - e^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

En posant $p := 1 - e^{-\frac{1}{2}}$, alors $\mathbb{P}(Y = k) = pq^{k-1}$. Donc Y suit une loi géométrique de paramètre p .

c) On note $Z := X - [X]$ la partie fractionnaire de X . Que vaut $Z(\Omega)$? Montrer que, pour tout réel t , $\{Z \leq t\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n \leq X \leq n + t\}$. En déduire la fonction de répartition de Z . Possède-t-elle une densité? Si oui, trouver la densité.

Il est clair que $Z(\Omega) = [0, 1[$. On a que

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{[X] = n\}, \quad \text{avec } \{[X] = n\} \cap \{[X] = m\}, \text{ si } n \neq m.$$

Alors pour $0 \leq t < 1$:

$$\{Z \leq t\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z \leq t\} \cap \{[X] = n\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X \leq t + n\} \cap \{[X] = n\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n \leq X \leq t + n\}.$$

Les événements étant incompatibles on a :

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(n \leq X \leq t + n) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_X(t + n) - F_X(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{t+n}{2}}$$

Donc, pour $t \in]0, 1[$,

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = (1 - e^{-\frac{t}{2}}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}} = \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}$$

Par ailleurs, pour $t \leq 0$, $F_Z(t) = 0$ et pour $t \geq 1$, $F_Z(t) = 1$. La fonction F_Z est dérivable presque partout, elle est donc bien une fonction de répartition d'une loi à densité. Une densité est donnée par la fonction $f_Z(t) = 0$ si $t \notin]0, 1[$, et $f_Z(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(1 - e^{-\frac{1}{2}})}$ sinon.

d) Z et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

Les ensembles $(-\infty, t] \times \{n\}$, avec $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, engendrent la tribu produit $\mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ainsi, il suffit de calculer $\mathbb{P}(\{Z \leq t\} \cap \{Y = n\})$, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(\{Z \leq t\} \cap \{Y = n\}) = \mathbb{P}(n - 1 \leq X \leq n - 1 + t) = e^{-\frac{n-1}{2}} - e^{-\frac{n-1+t}{2}} = e^{-\frac{n-1}{2}}(1 - e^{-\frac{t}{2}}).$$

D'après les points c) et b) précédents on a également, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z \leq t)\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{n-1}{2}}(1 - e^{-\frac{1}{2}}) = \mathbb{P}(\{Z \leq t\} \cap \{Y = n\}).$$

On conclut que les deux variables aléatoires Y et Z sont bien indépendantes.