

## CONTRÔLE CONTINU # 2

le 20 mars 2026 ; durée 1 heure ; aucun document autorisé

### Exercice 1 *Questions de cours ou presque*

Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle intégrable ayant la fonction de répartition  $F$  continue. Montrer

$$\text{que } E(|Z|) = \int_{-\infty}^0 F(t)dt + \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt.$$

### Exercice 2 *Couple aléatoire à densité*

On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité  $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x \geq 0}$ .

1. Trouver la densité de la variable aléatoire  $Z = X - Y$ . S'agit-il d'une loi remarquable ? En donner la fonction de répartition et l'espérance.
2. Que valent les fonctions caractéristiques  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$  de  $X$  et  $Y$ . En déduire la fonction caractéristique de  $Z$  (ne pas faire de calcul d'intégrale).
3. Déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy.

### Exercice 3 *Couple aléatoire discret*

Soient  $S$  et  $T$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\{1, 2, \dots\}$  et de même loi donnée par la suite  $p_n = 2^{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

1. Identifier la loi commune et calculer sa fonction caractéristique.
2. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(S > n)$ . En déduire la loi de  $\min\{S, T\}$ .
3. Calculer  $\mathbb{P}(T = rS)$  pour un rationnel positif non nul  $r$ . En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(S \text{ divise } T)$ . Que valent  $\mathbb{P}(S > T)$  et  $\mathbb{P}(S < T)$  ?

### Exercice 4 *Produit de variables indépendantes*

On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire produit  $W = UV$  de deux variables aléatoires réelles  $U$  et  $V$ . Les deux questions sont indépendantes :

1. Calculer la densité de  $W$  lorsque le couple  $(U, V)$  est de densité

$$f(u, v) = \begin{cases} ue^{-u(1+v)} & \text{si } u > 0, v > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Trouver la fonction caractéristique de  $W$  lorsque les variables sont indépendantes,  $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  et  $V$  est de fonction caractéristique notée  $\varphi$ .