Contrôle continu # 2

le 20 mars 2026 ; durée 1 heure ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Questions de cours ou presque*
Soit Z une variable aléatoire réelle intégrable ayant la fonction de répartition F continue. Montrer que $E(|Z|) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} F(t)dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F(t))dt$.

Correction : On sait que $\mathbb{E}(|Z|) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|Z| \geq t)$. (Remarque : l'intégrale est sur $(0, +\infty)$ et pas $\mathbb{R}$ contrairement à ce que beaucoup ont pensé..) De plus, pour $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|Z| \geq t) = P(Z \geq t) + \mathbb{P}(Z \leq -t).$$

Le changement de variable $u = -t$ montre alors :

$$\mathbb{E}(|Z|) = \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(Z \leq t) + \int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t)$$

Et par continuité de F

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - F(t)$$

ce qui conclut.

Exercice 2 *Couple aléatoire à densité*
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$.

1. Trouver la densité de la variable aléatoire $Z = X - Y$. S'agit-il d'une loi remarquable ? En donner la fonction de répartition et l'espérance.
   Correction : On a $X, Y \sim \mathcal{E}(1)$ indépendantes. Une densité de Z est donnée par :

   $$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z+y) f_Y(y)\, dy.$$

   Avec $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Si $z > 0$:

   $$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z+y)} e^{-y}\, dy = e^{-z} \int_0^{+\infty} e^{-2y}\, dy = e^{-z} \cdot \frac{1}{2}.$$

   Si $z < 0$:

   Condition : $y \geq 0$ et $z + y \geq 0$ donc $y \geq -z$.

   $$f_Z(z) = \int_{-z}^{+\infty} e^{-(z+y)} e^{-y}\, dy = e^{-z} \int_{-z}^{+\infty} e^{-2y}\, dy.$$

   $$= e^{-z} \cdot \frac{e^{2z}}{2} = \frac{1}{2} e^{z}.$$

Donc :

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}}$$

Z suit une loi de Laplace. Elle est donc d'espérance nulle ; car symétrique par exemple.

Quant à la fonction de répartition :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(x)\, dx.$$

Si $z \leq 0$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2}e^{x}\, dx = \frac{1}{2}e^{z}.$$

Si $z \geq 0$

$$F_Z(z) = 1 - \int_{z}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-z}.$$

2. Que valent les fonctions caractéristiques φ_X et φ_Y de X et Y. En déduire la fonction caractéristique de Z (ne pas faire de calcul d'intégrale).

   Correction :
   $$\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}.$$
   Donc par indépendance
   $$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \frac{1}{(1-it)(1+it)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

3. Déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy.
   Correction : On a obtenu ci-dessus
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{1+t^2}.$$
   Par inversion de Fourier, on obtient
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = e^{-|t|}.$$
   Ainsi, si C suit une loi de Cauchy centrée réduite, alors sa fonction caractéristique est
   $$\boxed{\varphi_C(t) = e^{-|t|}.}$$

Exercice 3 *Couple aléatoire discret*
Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \dots\}$ et de même loi donnée par la suite $p_n = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$.

1. Identifier la loi commune et calculer sa fonction caractéristique. C'est une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Correction : Par théorème de transfert
   $$\varphi_S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}e^{itn} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n = \frac{e^{it}/2}{1-e^{it}/2}. = \frac{e^{it}}{2-e^{it}}$$

2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S > n)$. En déduire la loi de $\min\{S, T\}$.
Correction :

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(S > n) = \mathbb{P}(S > n \cap T > n) \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}.$$

$$\mathbb{P}(\min(S,T) > n) = \mathbb{P}(S > n)\mathbb{P}(T > n) = 4^{-n}.$$

$\min(S,T)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(\min(S,T) = n) = \mathbb{P}(\min(S,T) > n) - P(\min(S,T) > n-1) = 4^{-(n-1)} - 4^{-n} = \frac{3}{4^n}.$$

$\min(S,T)$ suit une loi géométrique de paramètre $3/4$. Cela fait sens : c'est le rang du premier succès de la conjonction de deux expériences lancées en parallèle, dont la proba de succès est donc $3/4$ (la proba d'avoir deux échecs à une étape donnée est de $1/4$ donc d'avoir un succès $3/4$)

3. Calculer $\mathbb{P}(T = rS)$ pour un rationnel positif non nul r. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S$ divise $T)$. Que valent $\mathbb{P}(S > T)$ et $\mathbb{P}(S < T)$?
Correction : Si

$$r = \frac{a}{b}$$

écrit sous forme irréductible, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$.

Donc, d'après le lemme de Gauss

$$S = rT \iff \exists k \geq 1, \quad T = kb,\ S = ka.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(S = rT) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S = ka,\ T = kb).$$

L'indépendance donne

$$\mathbb{P}(S = ka,\ T = kb) = \mathbb{P}(S = ka)\mathbb{P}(T = kb) = 2^{-ka}2^{-kb} = 2^{-k(a+b)}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(S = rT) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k(a+b)} = \mathbb{P}(S = rT) = \frac{2^{-(a+b)}}{1 - 2^{-(a+b)}}.$$

En prenant $r = n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(S = nT) = \frac{2^{-(n+1)}}{1-2^{-(n+1)}} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$ Donc $\mathbb{P}(S|T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}-1}$

Enfin, $1 = \mathbb{P}(S = T) + \mathbb{P}(S < T) + \mathbb{P}(T < S)$. S et T ont même loi donc $\mathbb{P}(S < T) = \mathbb{P}(T < S)$. On calcule donc $\mathbb{P}(T = S) = \frac{1}{2^{1+1}-1} = \frac{1}{3}$ en prenant $n = 1$ dans ce qui précède.

Donc $\mathbb{P}(S < T) = \mathbb{P}(S > T) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 *Produit de variables indépendantes*
On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire produit $W = UV$ de deux variables aléatoires réelles U et V. Les deux questions sont indépendantes :

1. Calculer la densité de W lorsque le couple (U, V) est de densité
$f(u, v) = \begin{cases} ue^{-u(1+v)} & \text{si } u > 0, v > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction :

On peut utiliser la Proposition 1.9 du cours directement : On fait le changement de variables

$$(u, v) \longmapsto (u, w), \qquad w = uv.$$

pour obtenir la loi de (U, UV), que l'on intégrera ensuite en u. Alors

$$v = \frac{w}{u}.$$

Comme $u > 0$ et $v > 0$, on aura nécessairement $w > 0$.

Le jacobien de l'application inverse $(u, w) \mapsto (u, w/u)$ vaut

$$\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, w)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$

Donc, pour $w > 0$,

$$f_W(w) = \int_0^{+\infty} f\left(u, \frac{w}{u}\right) \frac{1}{u}\, du.$$

Remplaçons :

$$f\left(u, \frac{w}{u}\right) = ue^{-u\left(1+\frac{w}{u}\right)} = ue^{-u-w}.$$

Ainsi

$$f_W(w) = \int_0^{+\infty} ue^{-u-w} \frac{1}{u}\, du = e^{-w} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = 1.$$

Donc

$$f_W(w) = e^{-w} \qquad (w > 0).$$

Et pour $w \leq 0$,

$$f_W(w) = 0$$

car $W = UV > 0$ presque sûrement.

Finalement

$$\boxed{f_W(w) = e^{-w} \mathbf{1}_{w>0}.}$$

Si d'aventure on ne connaît pas la proposition 1.9 du cours, on fixe h continue bornée, et on écrit avec le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(h(UV)) = \int h(uv) f(u, v) dudv = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} h(uv) ue^{-u(1+v)} dudv$$

Pour isoler $h(u)$, on fait le même changement de variable que celui suggéré précédemment. On obtient alors

$$\mathbb{E}(h(UV)) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} h(w) ue^{-u} e^{-w} dudw$$

On calcule l'intégrale en w, et on trouve

$$\mathbb{E}(h(UV)) = \int_{\mathbb{R}_+} h(w)e^{-w}dw = \int_{\mathbb{R}} h(w)e^{-w}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(w)dw.$$

Cela étant vrai pour toute fonction continue bornée on trouve bien comme densité $e^{-w}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$

2. Trouver la fonction caractéristique de W lorsque les variables sont indépendantes, $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ et V est de fonction caractéristique notée φ.
Correction : On veut calculer

$$\varphi_W(t) = \mathbb{E}(e^{itUV}).$$

Comme U et V sont indépendantes et $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, on écrit directement

$$\varphi_W(t) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} e^{ituv}\, d\mathbb{P}_V(v)\, du = \int_0^1 \varphi_V(ut)du$$

Ce qui suffisait à avoir les points.

On pouvait aussi intégrer par rapport à u : Si $v \neq 0$, on obtient

$$\int_0^1 e^{ituv}\, du = \left[\frac{e^{ituv}}{itv}\right]_0^1 = \frac{e^{itv}-1}{itv}.$$

(La formule reste valable en $v = 0$)

Donc

$$\varphi_W(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itv}-1}{itv}\, d\mathbb{P}_V(v).$$

On reconnaît

$$\mathbb{E}\left(\frac{e^{itV}-1}{itV}\right),$$

d'où

$$\boxed{\varphi_W(t) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{itV}-1}{itV}\right).}$$