Exercice Tribu complétée

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\overline{\mathcal{F}} := \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu et plus précisément $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles $\mathbb{P}-$négligeables, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$.
2. On définit une nouvelle mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mathbb{P}}(C) := \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\overline{\mathbb{P}}$ est bien définie, i.e. que sa valeur ne dépend par du choix des encadrants A_1 et A_2, et que $\overline{\mathbb{P}}$ est l'unique mesure sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ qui prolonge $\mathbb{P}$, i.e. qui coincide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$.
3. Montrer que pour toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\overline{\mathcal{F}}-$mesurable, il existe des fonctions $\mathcal{F}-$mesurables $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$, telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$, $\mathbb{P}-$presque sûrement.
4. Déterminer $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ pour δ_a où $a \in \mathbb{R}$.
5. **DENC** [a] **:** A-t-on $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue ? A-t-on $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Question 1 : Déjà, $\emptyset \in \bar{\mathcal{F}} : \emptyset \subset \emptyset \subset \emptyset$.
Passage au complémentaire : si $A_1 \subset C \subset A_2$, $A_2^c \subset C^c \subset A_1^c$ et $A_1^c \backslash A_2^c = A_2 \backslash A_1$ est bien de probabilité nulle.
Union dénombrable : $C_n \in \bar{\mathcal{F}}$, $A_{1,n} \subset C_n \subset A_{2,n}$. Alors $\bigcup A_{1,n} \subset \bigcup C_n \subset \bigcup A_{2,n}$. Et $\bigcup A_{2,n} \backslash \bigcup A_{1,n} \subset \bigcup A_{2,n} \backslash A_{1,n}$. Enfin, $\mathbb{P}(\bigcup A_{2,n} \backslash A_{1,n}) \leq \sum \mathbb{P}(A_{2,n} \backslash A_{1,n}) = 0$.
Enfin, l'inclusion $\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N}) \subset \bar{\mathcal{F}}$ est claire car $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient les négligeables et $\mathcal{F}$. L'inclusion réciproque : si $C \in \mathcal{F}$, soit A_1, A_2 tels que $A_1 \subset C \subset A_2$. Alors $C = A_1 \cup C \backslash A_1$, et $C \backslash A_1 \subset A_2 \backslash A_1$ et $\mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0$ donc $C \backslash A_1 \in \mathcal{N}$ donc $C \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$

Question 2 : Déjà, $A_2 = A_1 \cup A_2 \backslash A_1$ donc $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = \mathbb{P}(A_1)$. Maintenant, si on a un autre encadrement $B_1 \subset C \subset B_2$, $A_1 \subset C \subset B_2$ donc $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(B_2)$. De même, $\mathbb{P}(B_1) \leq \mathbb{P}(B_2)$. Donc

$$\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) \leq \mathbb{P}(A_2).$$

Mais $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Il n'y a donc que des égalités, et la probabilité est correctement définie.
De plus, elle prolonge bien $\mathbb{P}$: si $C \in \mathcal{F}, C \subset C \subset C$ donc $\bar{\mathbb{P}}(C) = \mathbb{P}(C)$.
Pour finir, il y a unicité : soit μ une mesure sur $\bar{\mathcal{F}}$ telle que $\mu = \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$. Soit $C \in \bar{\mathcal{F}}$, $A_1 \subset C \subset A_2$. Alors $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0$ Donc $\mu(A_2) = \mu(A_1)$ et enfin $\mu(A_1) \leq \mu(C) \leq \mu(A_2)$ donc $\mu(C) = \mu(A_1) = \mathbb{P}(A_1) = \bar{\mathbb{P}}(C)$.

Question 3 : D'abord, si C est un événement, c'est vrai pour l'indicatrice de C car alors $\mathbf{1}_{A_1} \leq \mathbf{1}_C \leq \mathbf{1}_{A_2}$
Pour $S = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{C_k}$ où $a_k \geq 0, C_k \in \bar{\mathcal{F}}$ une fonction simple positive, c'est aussi vrai en prenant $V = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_{2,k}}$ et $U = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_{1,k}}$
Pour une variable aléatoire positive générale, on l'approche par une suite croissante de fonctions simples positives, et une suite décroissante de fonctions simples positives. Le sup de la première suite et l'inf de la seconde conviennent. Pour une variable aléatoire quelconque, on l'écrit $X = X^+ - X^-$.

Question 4 : Les négligeables de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de dirac en a sont tout les boréliens ne contenant pas a. Donc toute partie de $\mathbb{R} \backslash \{a\}$ est dans la tribu complétée. Donc si A est une partie de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a, alors elle est dans la tribu complétée. Sinon, $A = \{a\} \cup \mathbb{A} \backslash \{a\}$ est aussi dans la tribu complétée. Donc $\bar{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Question 5 : Les deux affirmations sont fausses. Les contre exemples sont compliqués et nécessitent l'axiome du choix. On appelle tribu de Lebesgue la tribu borélienne complétée pour la mesure de Lebesgue.

[a] Difficile et Nécessite de la Culture