PRO L3 Révisions

ENS Rennes - Matteo Miannay

5 mai 2026

Résumé

Quelques méthodes usuelles, associées à des exercices pour brillamment réviser et avoir une superbe note.

Table des matières

1 Variables aléatoires, lois, et indépendances

Définition d'une variable aléatoire et probabilités élémentaires

- **Définition :** Une variable aléatoire est une fonction mesurable $X : \Omega \longrightarrow E$ où $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable.
- **Continuité croissante / décroissante :** Si (A_n) est une suite croissante d'événements, $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$. De même, si (A_n) est décroissante, $\mathbb{P}(\bigcap A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.
- **Loi du $0-1$ de Borel-Cantelli :** Si (A_n) est une suite d'événements, on définit $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Alors $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Si de plus les événements sont indépendants, $\sum P(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

$\hookrightarrow$ *TD2: Ex2,3,4 | TD3: Ex1 | CC1(2026):Ex1*

Densité ; fonction de répartition et lois

- La fonction de répartition $F_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ d'une variable aléatoire X caractérise la loi de X.
- Elle est *cadlàg*, croissante, et tend vers respectivement 0 et 1 en $\mp\infty$.
- Réciproquement, toute fonction vérifiant ces conditions est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- Si $E = \mathbb{R}^d$ et qu'il existe une fonction f_X mesurable telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)dx$, on dit que X est à densité. Une telle fonction f_X est intégrable, d'intégrale 1 et positive.
- Réciproquement, toute fonction vérifiant ces conditions est la densité d'une variable aléatoire.
- Si F_X est dérivable presque partout, alors X est à densité de densité $f_X = F_X'$.
- Pour déterminer la densité de $g(X)$ où g est un C^1-difféomorphisme et X est à densité, on peut soit écrire la fonction de répartition de Y et se ramener à celle de X, soit savoir que Y est à densité, de densité $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\mathrm{Jac} g^{-1}(y)|$.
- Une autre méthode est d'utiliser les moments. La loi de Y est entièrement déterminée par $\mathbb{E}(h(Y))$ pour h continue bornée. On écrit alors le théorème de transfert, effectue un changement de variable idoine et on retrouve le résultat précédent.

$\hookrightarrow$ *TD3: Ex4,5 | TD4: Ex2,4,6,7,8,9 TD9: Ex1,2 | CC1(2026):Ex2,3 | CC1(2025):Ex1 | CC2(2025):Ex2*

Indépendance

- Deux variables aléatoires sont dites indépendantes si pour tout A, B mesurables $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.
- De manière équivalente deux variables aléatoires sont indépendantes si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes ssi $\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$ pour tout t_1, t_2 réels, c'est à dire $\varphi_{(X,Y)} = \varphi X \otimes \varphi Y$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes à densité f_X and f_Y, alors la densité de $Z = X + Y$ est :

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t)dt$$

2 Espérance

Espérance

- On définit l'espérance d'une variable aléatoire X par $\mathbb{E}(X) = \int X d\mathbb{P} = \int t \mathrm{d}\mathbb{P}_X(t)$, sous réserve d'existence.
- Si X est à densité, alors $\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x) dx$.
- Si $X_n \longrightarrow X$ simplement, que $|X_n| \leq Y$ où Y admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$. Plus généralement, tous les théorèmes de la théorie de l'intégration s'appliquent encore.
- Inégalité de Jensen : si φ est convexe, $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$.
- Théorème de transfert : sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(h(X)) = \int h(t)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(t)$. En particulier, si X est à densité, $\mathbb{E}(h(X)) = \int h(t) f_X(t) dt$.
- Inégalité de Markov : si X admet une espérance, $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{t}$ pour tout $t > 0$.
- Inégalité de Bienaymé-Chebyschev : Si X admet un moment d'ordre 2, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - E(X)| > \varepsilon) < \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.
- On appelle moment d'ordre p la quantité $\mathbb{E}(|X|^p)$. On note $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace des variables aléatoires sur Ω admettant un moment d'ordre p, quotientés par la relation $X = Y \quad p.p.$ Les espaces L^p sont décroissants pour l'inclusion. Muni de la norme $\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}$, c'est un espace complet.
- Inégalité de Hölder : si p, q sont conjugués, c'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que $X \in L^p$, $Y \in L^q$ alors $XY \in L^1$ et $\mathbb{E}(|XY|) \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}$

↪ *TD5: Ex2,4,5,6*

Fonction caractéristique

- On définit la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}^d$ par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t \cdot X\rangle})$ pour $t \in \mathbb{R}^d$
- La fonction caractéristique caractérise la loi.
- $\varphi_X(0) = 1$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
- Inversion de Fourier : si $\varphi \in L^1$, alors X est à densité de densité $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i\langle t \cdot x\rangle} \varphi_X(t) \mathrm{d}t$
- Si X admet un moment d'ordre k alors φ_X est k-fois dérivable, et on peut dériver sous l'intégrale.
- Réciproquement si φ_X est $k-$fois dérivable en 0 alors X admet des moments d'ordre inférieurs ou égaux à $2l \leq k$.

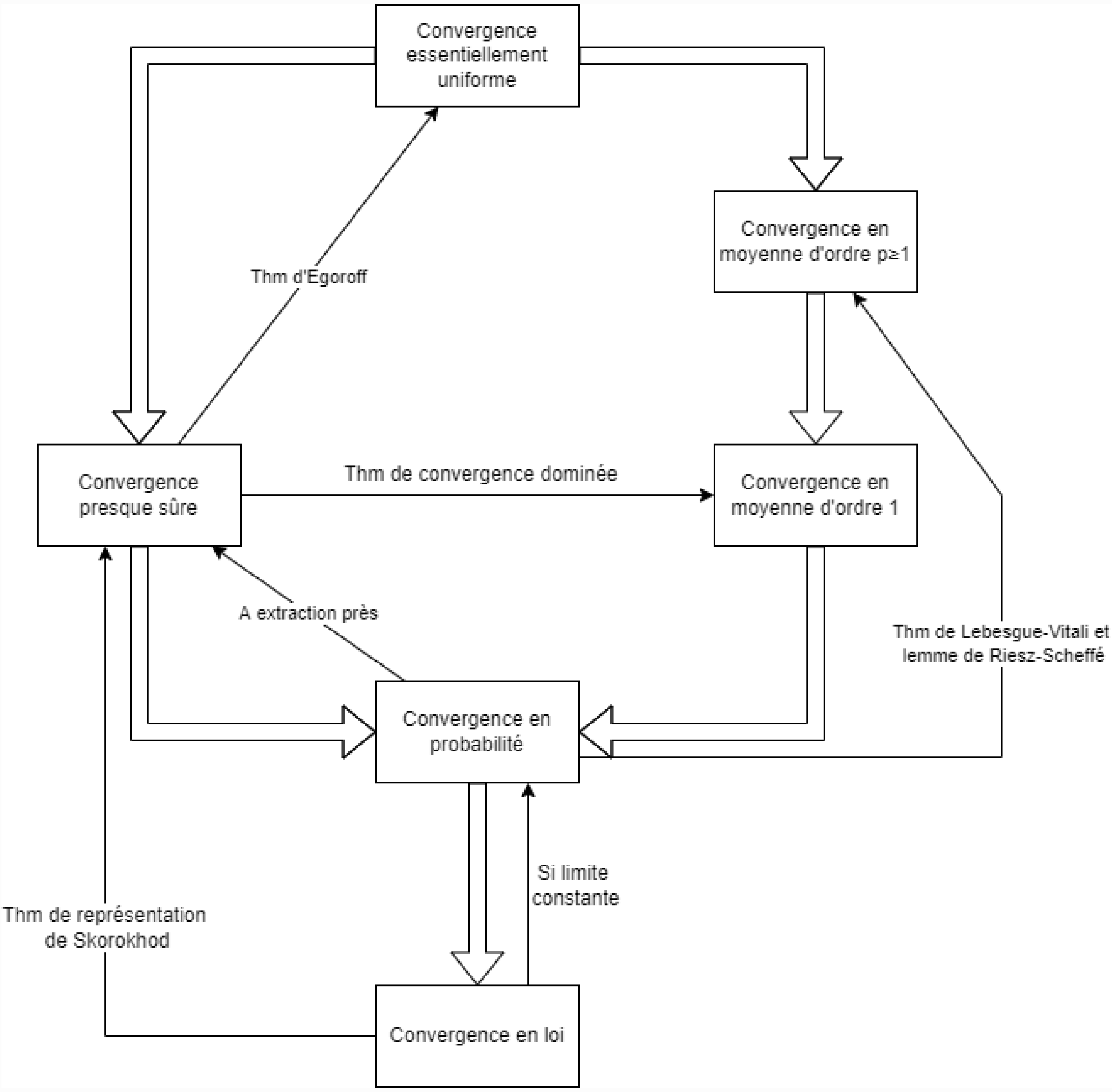
↪ *TD6: Ex1,2,5,6 / TD9: Ex6 / CC2(2026):Ex2,4*

3 Convergence de VA

Les différentes notions

- (X_n) converge p.s vers X si $\mathbb{P}(X_n \longrightarrow X) = 1$.
- Si pour tout $\varepsilon > 0, \sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$, alors $X_n \longrightarrow X$ p.s.(c'est Borel-Cantelli). On utilise souvent Bienaymé-Tchebychev ou Markov pour montrer ceci.
- La réciproque est vraie si X est constante.
- (X_n) converge en proba vers X si pour tout $\varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$.
- Si on note $d(X,Y) = \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1)$ alors d est une distance sur L^0 métrisant la convergence en probabilité.
- Si g est continue, que (X_n) tend vers X, (Y_n) vers Y alors $g(X_n)$ tend vers $g(X), X_nY_n$ vers XY et $\alpha X_n + \beta Y_n$ vers $\alpha X + \beta Y$, où les convergences ont lieu en probabilité, ou presque sûrement.
- On dit que (X_n) converge vers X en norme p si (X_n) converge vers X dans L^p, i.e $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \longrightarrow 0$
- On dit que (X_n) converge en loi vers X si $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ en tout point de continuité de F, ce qui est équivalent à la convergence de φ_{X_n} vers φ_X en tout point, ce qui est équivalent à la convergence de $\mathbb{E}(h(X_n))$ vers $\mathbb{E}(h(X))$ pour toute fonction h continue bornée.
- Si (X_n) tend vers X en loi, alors $f(X_n)$ tend vers $f(X)$ si f est une fonction continue.

Liens entre les notions



Cette superbe image est issue de wikipédia. Il faut retenir que si (X_n) converge en proba, une sous suite converge p.s, que la convergence en loi est impliquée par toutes les autres, que pour montrer des convergences dans L^p à partir d'une convergence ps on utilise le TCVD, et que si on a convergence en loi vers une constante, on a convergence ps.

$\hookrightarrow$ *TD7: Ex1,2,3,4,5,6,7,11,12,15*

4 Théorèmes limites

Loi des grands nombres

- Si les (X_i) sont une suite de VA i.i.d et L^1, alors $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement (loi forte) et en probabilité (loi faible).
- De manière plus générale, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors si les X_i sont deux à deux décorrelées ($\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$ dès que $i \neq j$), que $\sup_{i\in\mathbb{N}} Var(X_i) < +\infty$, alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \longrightarrow 0$ presque sûrement.

Théorème centrale limite

Ici, (X_n) est une suite de VA iid L^2. On note μ la moyenne commune et σ^2 la variance commune. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors on a la convergence en loi vers une normale centrée réduite suivante :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

$\hookrightarrow$ *TD8: Ex1,2,3,4,6,7*